

Fizika 2. előadás

Elektromágnesség és optika

-

Elektrosztatika I–II.

Buzás Attila

okleveles geofizikus, PhD

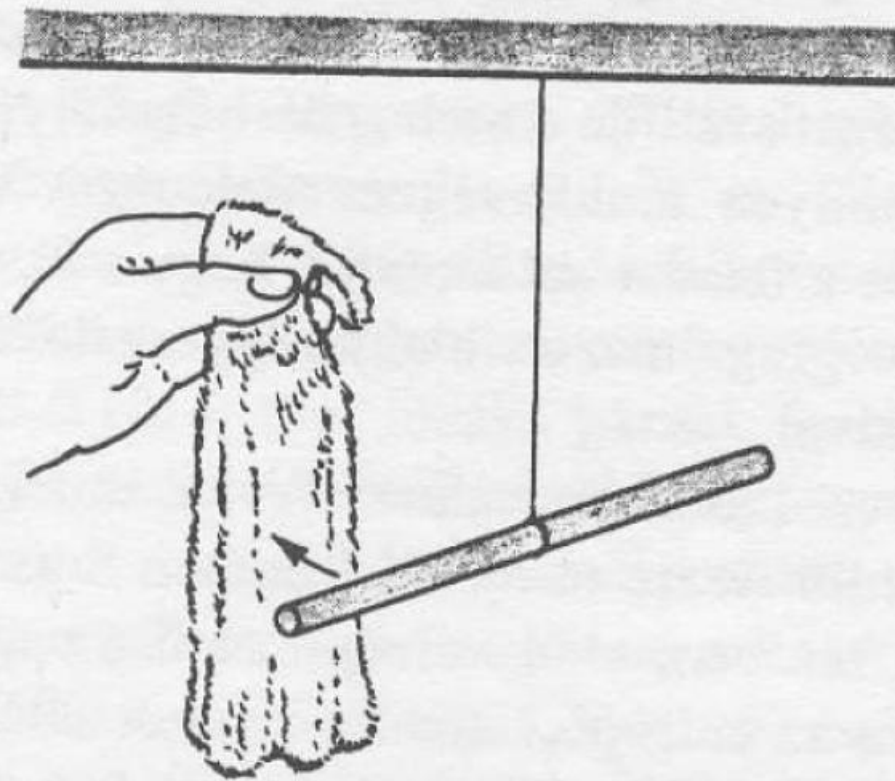
HUN-REN-ELTE Űrkutató Kutatócsoport

HUN-REN Földfizikai és Űrtudományi Kutatóintézet

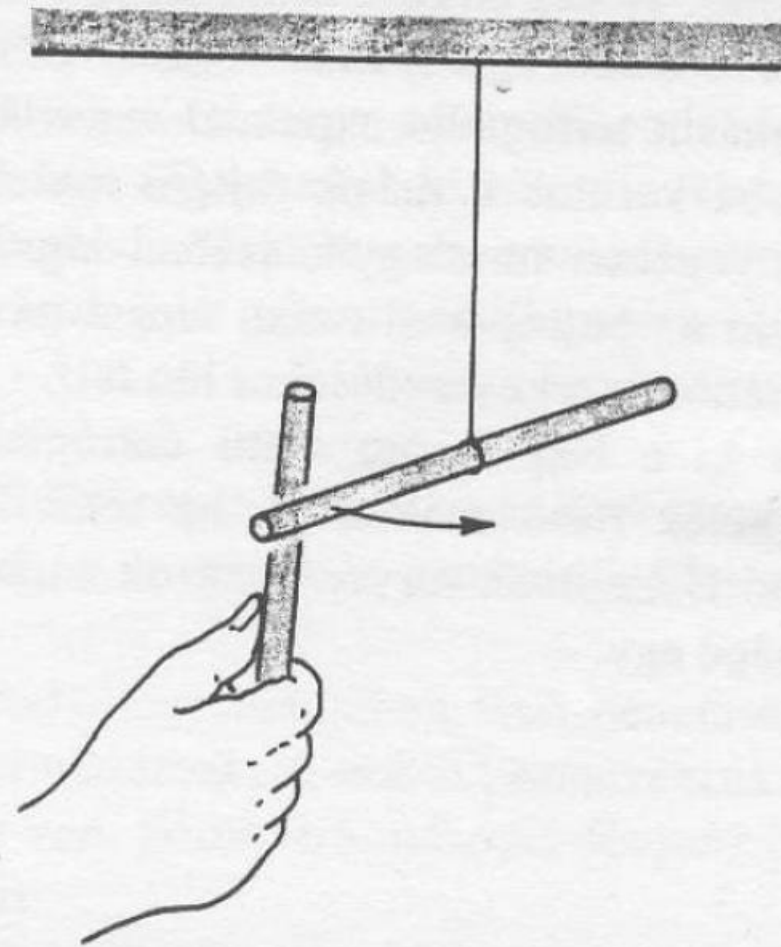
atilatbuzas@ttk.elte.hu

2026–2027

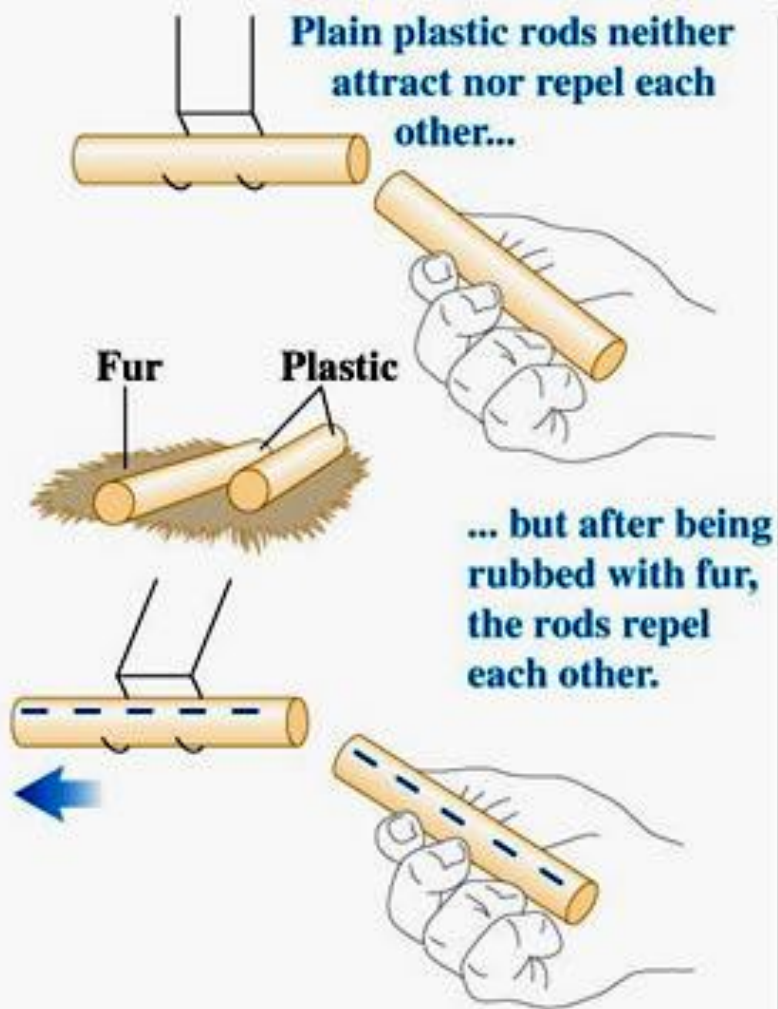
Budapest



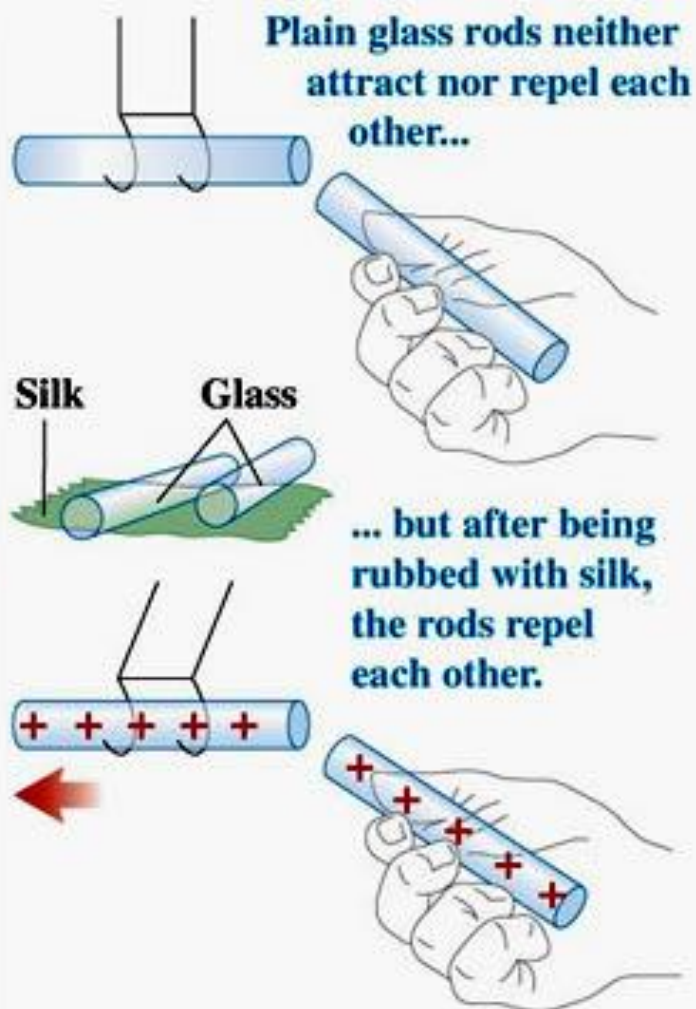
a) Amikor szőrmével dörzsölünk meg egy keménygumi rudat, a szőrme-darab magához **vonzza** a rúd megdörzsölt végét.



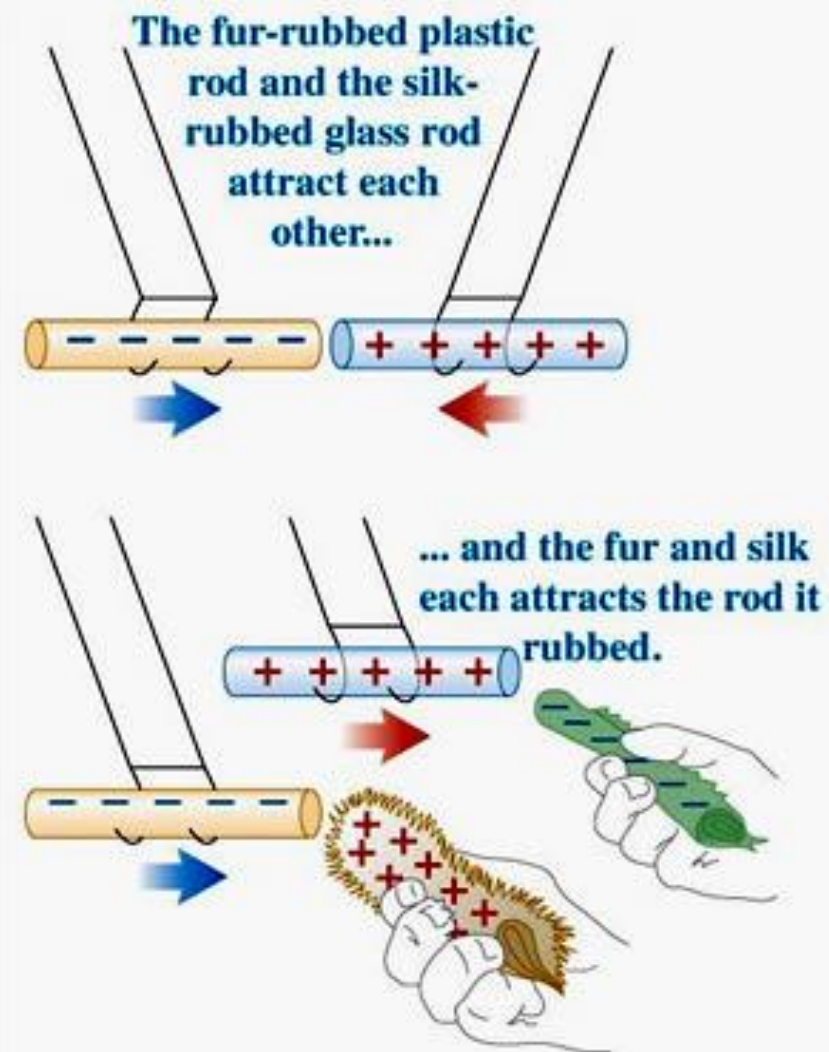
b) Két ilyen megdörzsölt rúd **taszítja** egymást.



(a) Interaction between plastic rods rubbed on fur



(b) Interaction between glass rods rubbed on silk



(c) Interaction between objects with opposite charges

- **Töltésszétválás:** A dörzsölés valójában csak a nagymértékű felületi érintkezést biztosítja; ekkor az elektronok átvándorolnak az egyik anyagból a másikba.
- **Pozitív és negatív töltés:** Az az anyag lesz pozitív töltésű, amely elektronokat veszít (elektronhiánya lesz), és az lesz negatív, amely elektronokat vesz fel (elektrontöbblete lesz).
- **Kölcsönhatás:** Az azonos előjelű töltések taszítják, a különbözőek vonzzák egymást.

Elektromos töltés

$1\text{C} = 1\text{As}$ 1 Amper áram által 1 másodperc alatt szállított töltés

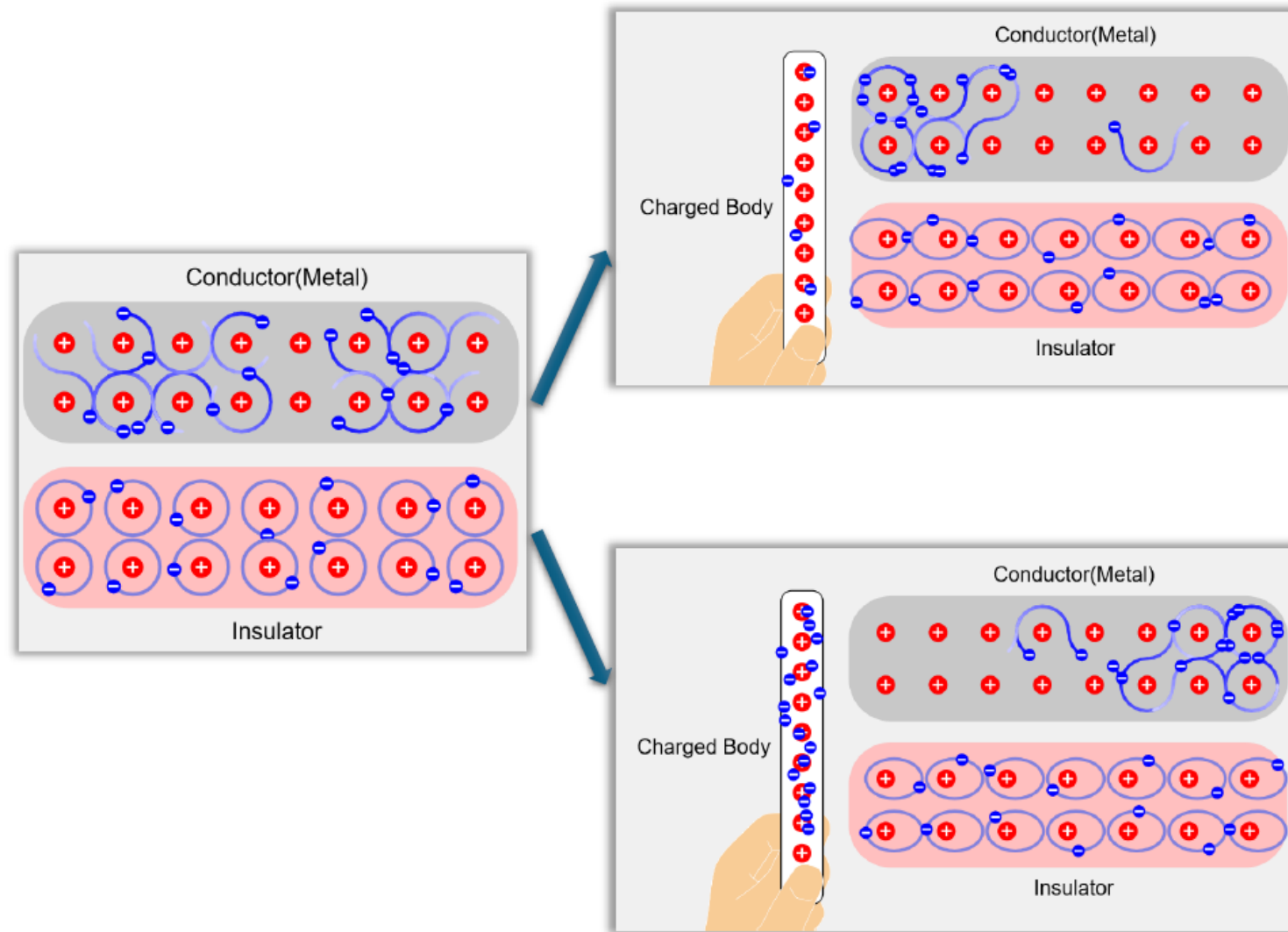
proton és elektron $\pm 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Villámlás: 5-20 C

24-1 táblázat

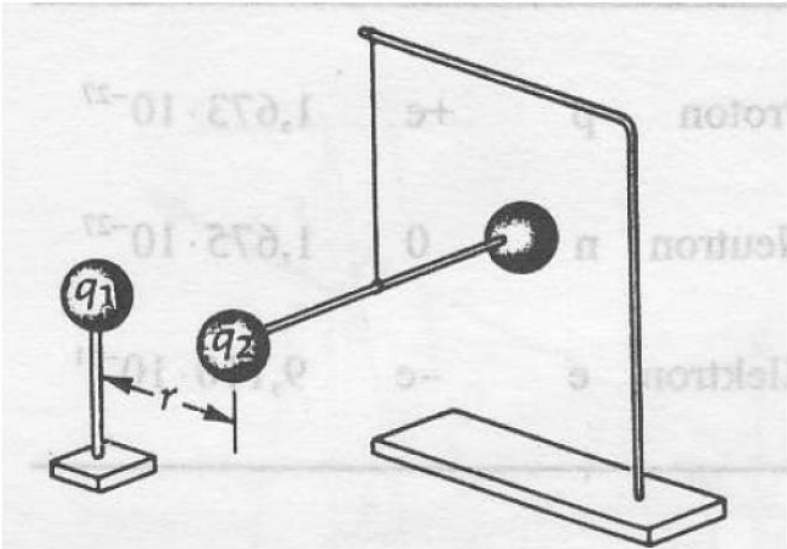
Részecske			
neve	jelölése	töltése	tömege(kg)
Proton	p	+e	$1,673 \cdot 10^{-27}$
Neutron	n	0	$1,675 \cdot 10^{-27}$
Elektron	e	-e	$9,110 \cdot 10^{-31}$

Vezetők és szigetelők



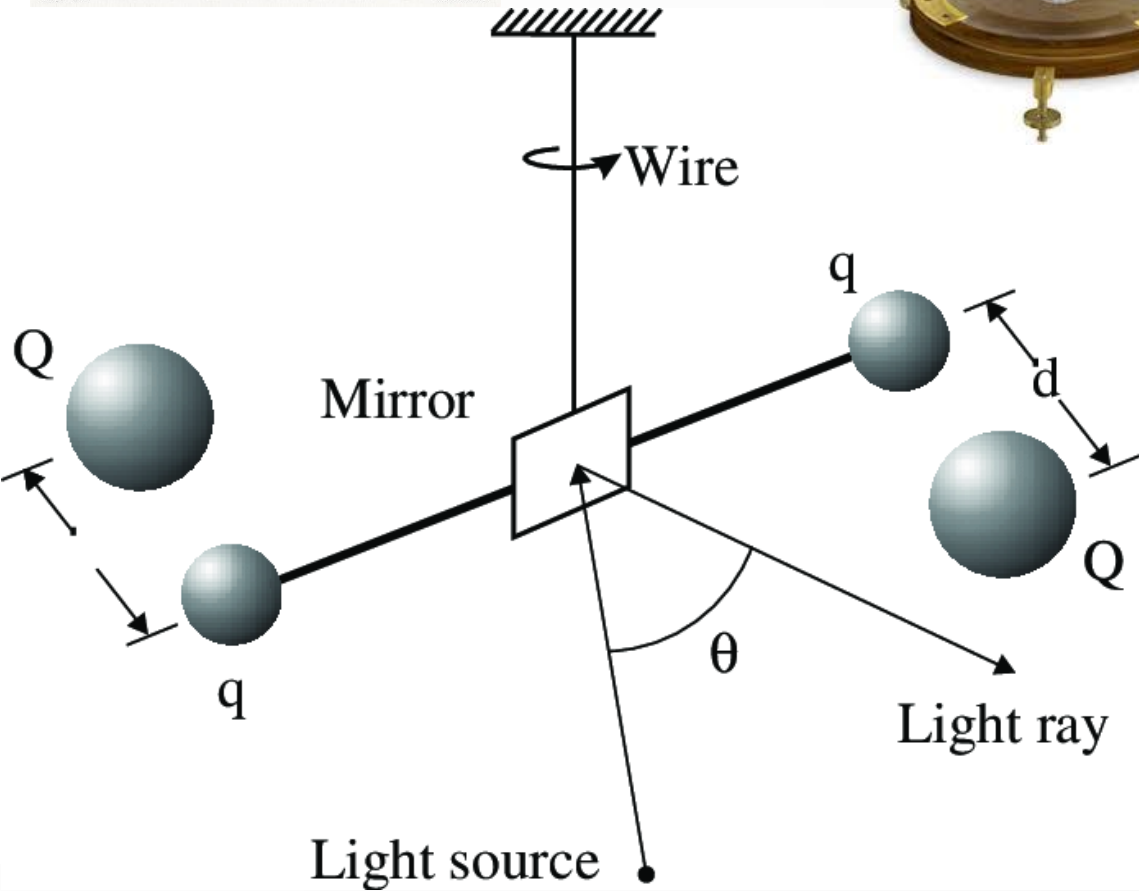
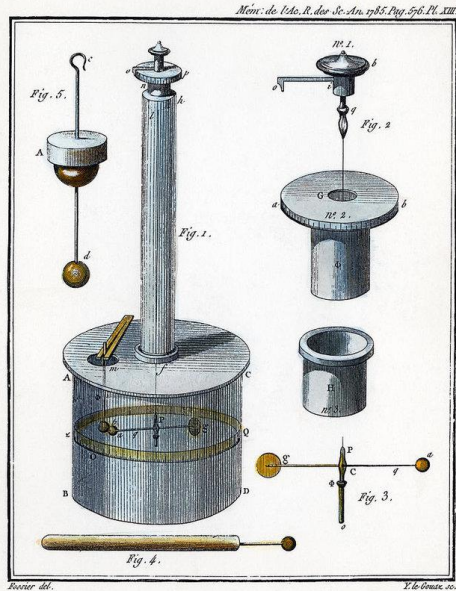
https://javalab.org/en/conductor_and_insulator_en/

➤ Coulomb-(torziós)mérleg:
<https://www.youtube.com/watch?v=FYSTGX-F1GM>



24-2 ábra
Torziós mérleg. A q_1 és q_2 töltések közötti kölcsönhatás miatt a vízszintes rúdról lelógó szál elcsavarodik.

Mitől függ az erő nagysága?



A Coulomb-törvény

Elektromos ponttöltés



Két pontszerű töltés között ható elektromos erő az őket összekötő egyenes mentén hat, és nagysága arányos a töltések nagyságával, illetve fordítva arányos a távolságuk négyzetével.

$$|\vec{F}| \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

➤ SI:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

➤ Elektrosztatikus állandó:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

➤ Vákuum permittivitása:

$$\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

➤ CGS:

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

➤ Gravitációs vs. elektromágneses kölcsönhatás:

$$G \approx 6.67430 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

(or equivalently in SI base units: $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$)

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = 8.85418782 \text{ C/Nm}^2$$

Electrostatic constant (k_e): $\sim 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ (huge magnitude)
 Gravitational constant (G): $\sim 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ (tiny magnitude)

$$F_{grav} = 6,67 * 10^{-11} \frac{(1,67 * 10^{-27}) * (9,1 * 10^{-31})}{r^2} = \frac{(1,01 * 10^{-67})}{r^2}$$

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi * 8,8 * 10^{-12}} \frac{(1,6 * 10^{-19})^2}{r^2} = \frac{2,3 * 10^{-28}}{r^2}$$

SI (MKS, MKSA) vs. CGS szempontból lesz fontos:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \text{ c}^2 \text{ (definíció szerint)}$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

= 9 10⁹ (kísérletileg)

$$F_N = G \frac{m_1 \bullet m_2}{r^2}$$

$$F_K = k \frac{q_1 \bullet q_2}{r^2}$$

$$\frac{F_{grav}}{F_{el}} = \frac{1,01 * 10^{-67}}{2,3 * 10^{-28}} = 1,4 * 10^{-40}$$

A Coulomb-törvény

➤ Vektoriális alak:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$



$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

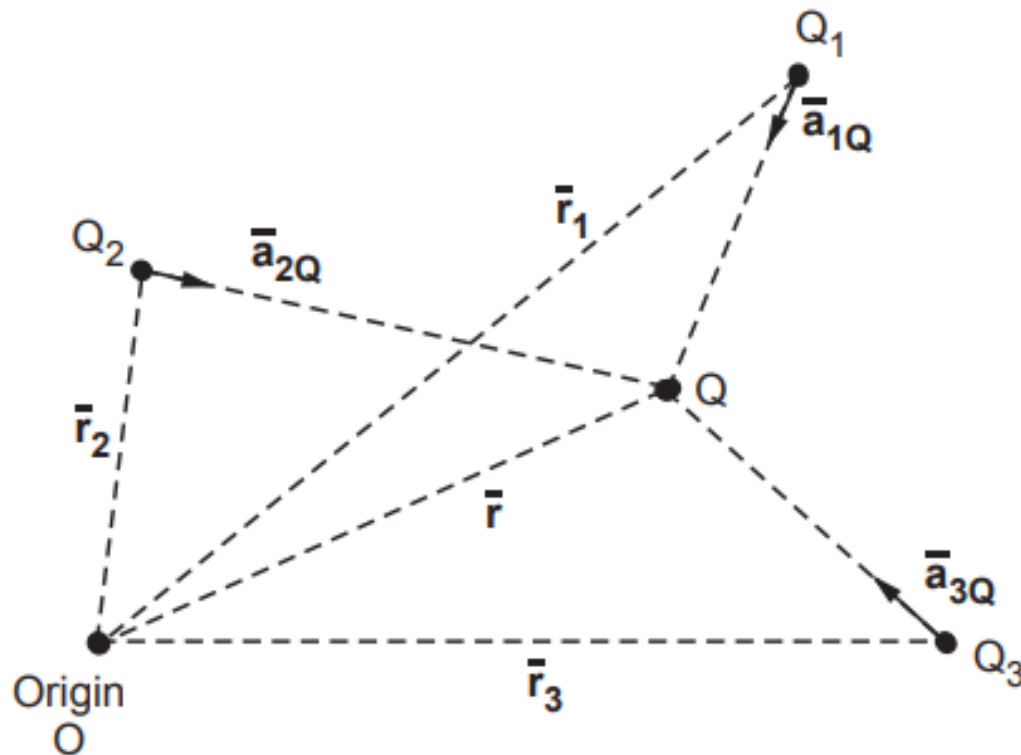
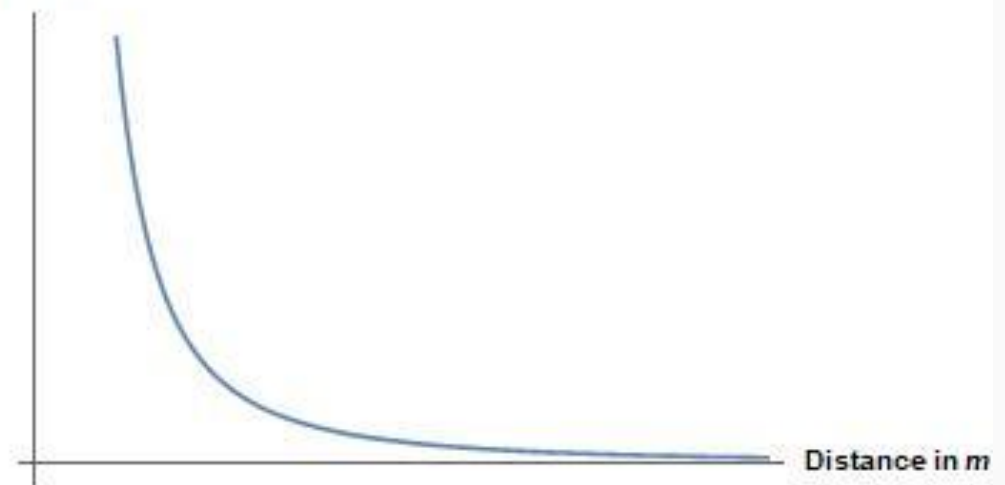


Fig. 2.2.4

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Force in N

Force Graph



A Coulomb-törvény

➤ Vektoriális alak:

Electrostatic Coulomb's Law in vector form

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

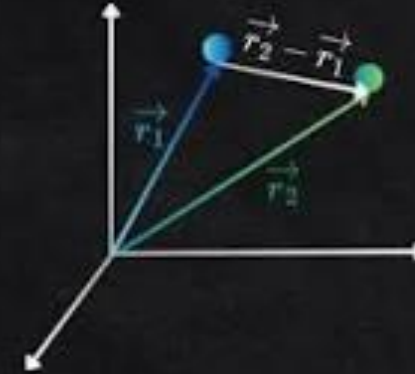
$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$



➤ **Elektrosztatika:**

- Nyugvó töltések,
- Nincs töltésáram.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \mathbf{J} = 0 \text{ (or } \mathbf{j} = \mathbf{0})$$

Az **elektromos áramsűrűség** a vezető egységnyi felületén a felületre merőleges irányban áthaladó **elektromos áram** nagysága, feltételezve, hogy a vezetőben az áram eloszlása egyenletes. Másképpen az áramsűrűség az egységnyi felületen a rá merőleges irányban időegység alatt áthaladó töltésmennyiséggel egyenlő, egyenletes árameloszlás mellett.

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

$$[\mathbf{J}] = \text{Am}^{-2}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}}$$

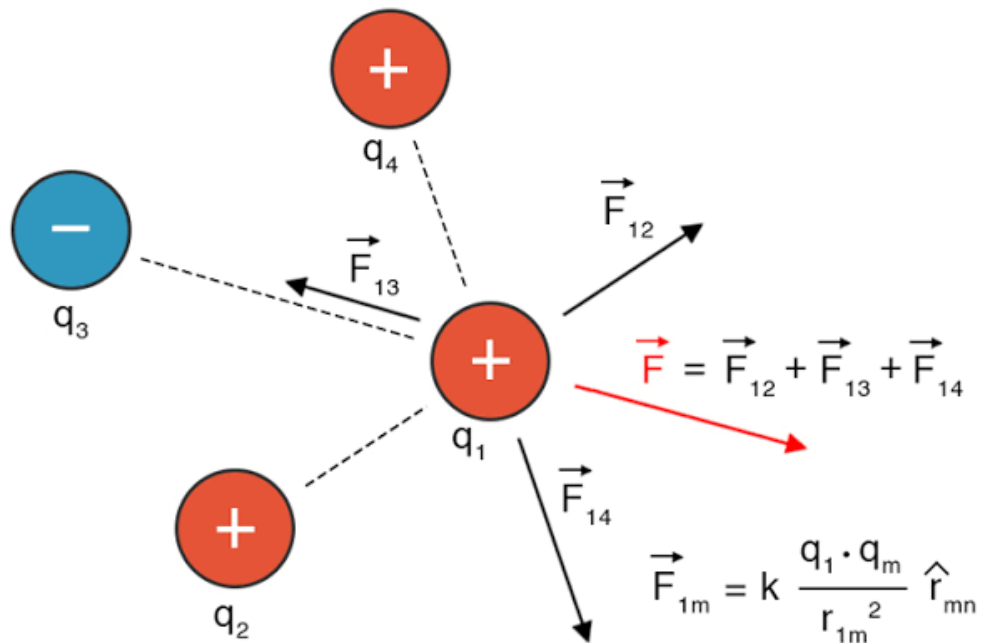
$$\mathbf{j} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{dI}{dA}$$

➤ Szuperpozíció-elve:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \mathbf{F}_{01} + \mathbf{F}_{02} + \cdots + \mathbf{F}_{0N} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{0i}$$

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i)$$

Superposition Principle of Coulomb's Law

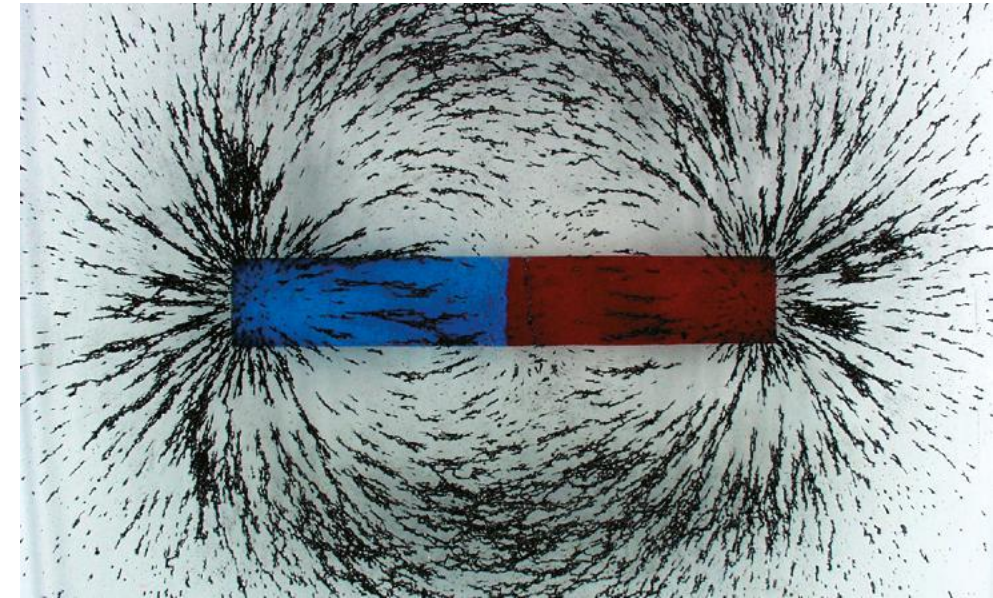
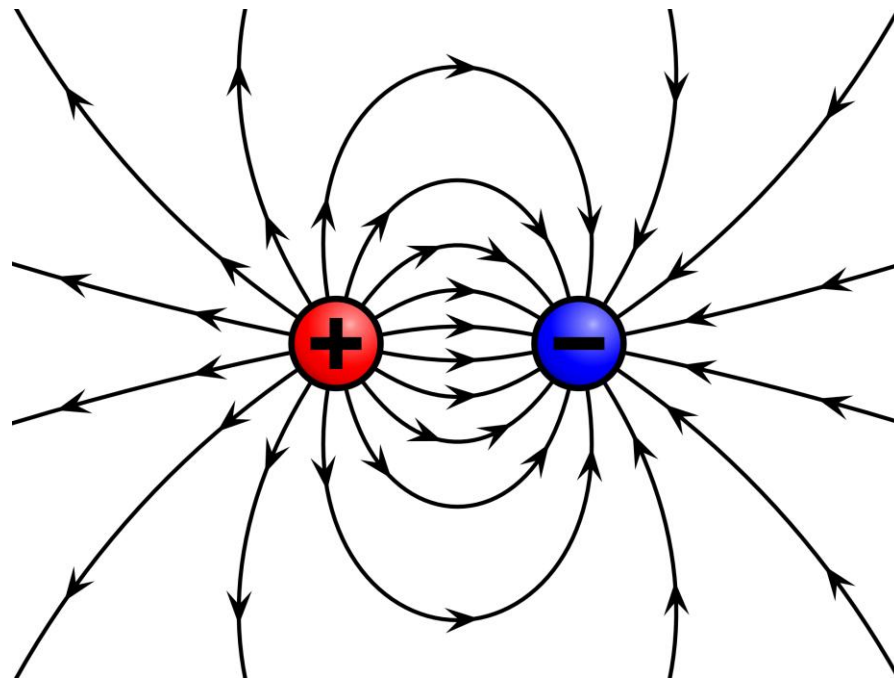


Superposition principle

$$\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{a=1}^n \frac{q_a(\vec{r}_0 - \vec{r}_a)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_a|^3}$$

The diagram shows a 3D coordinate system with axes x, y, and z. The origin is labeled O. A point charge q_0 is at the origin. Several other point charges $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ are located at positions $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$ relative to O. The electric field vector $\vec{F}$ is shown as the vector sum of the individual electric field vectors from each charge.

Elektromos erőter – ponttöltés tere



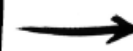
VEKTORTÉR!

q_0 : próbatöltés

q : (pont)forrás

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_0$

$$\mathbf{F} = q_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

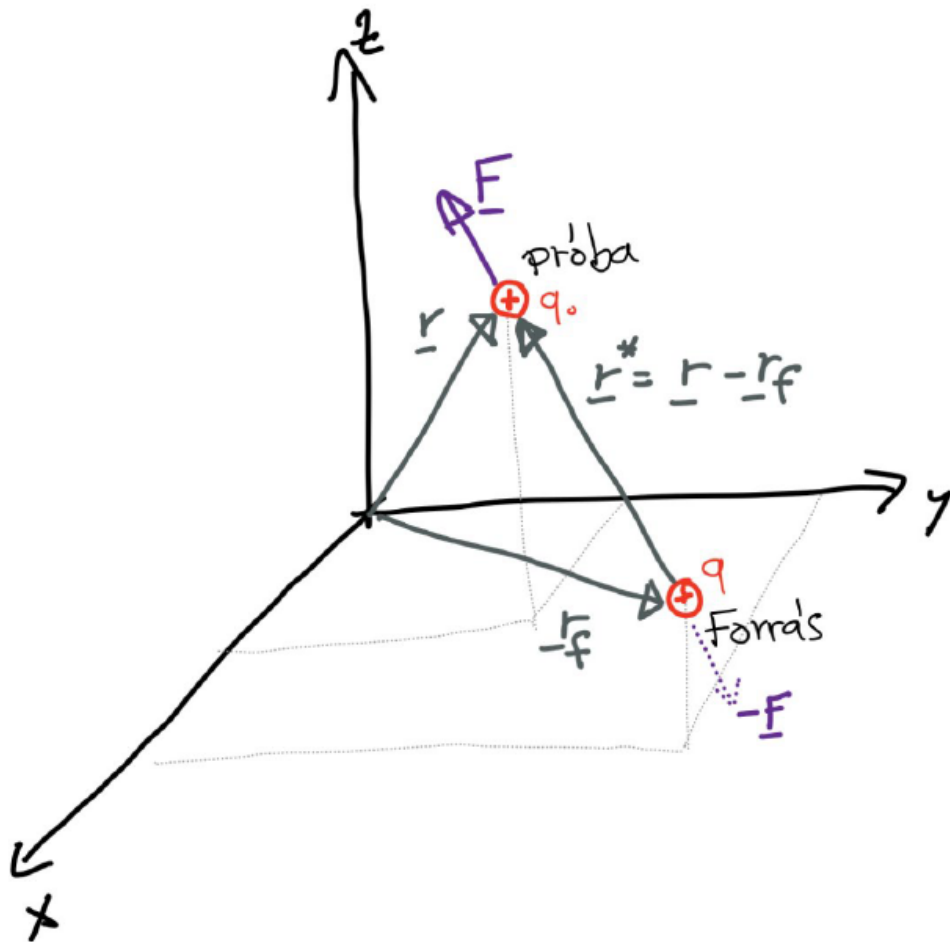


$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Ismétlés: Nyugvó pontforrás elektrosztatikus mezője

Elektrosztatika: időben állandó elektromos terek

Erőtér: forrás $\longrightarrow$ mező $\longrightarrow$ erőhatás



$\mathbf{r}(x,y,z)$ pontba helyezett pontforrásra (q_0) ható

Coulomb erő:

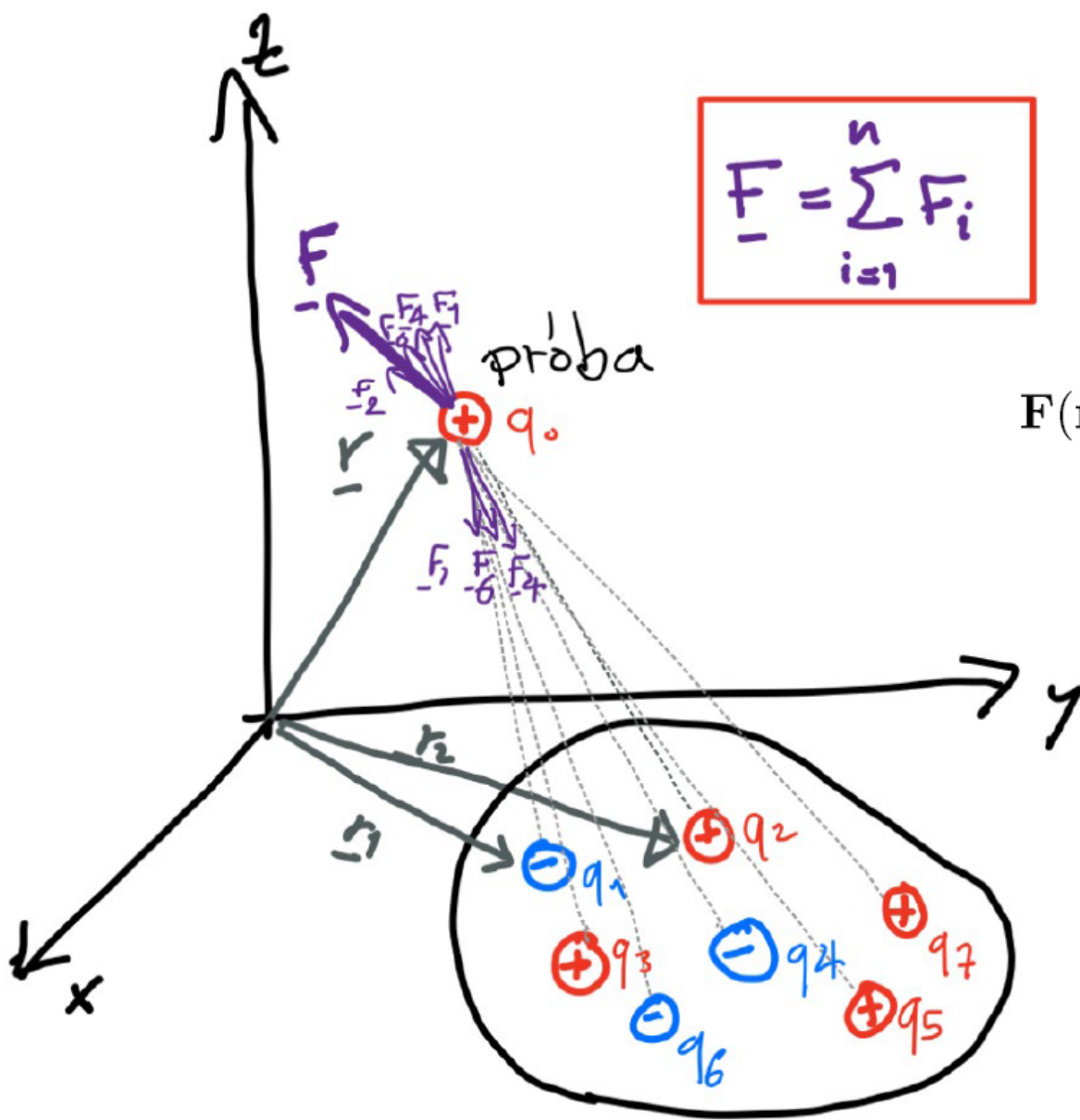
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \cdot q}{|\mathbf{r}^*|^2} \hat{\mathbf{r}}^* = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \cdot q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|}$$

A próbatöltésre ható erőt elosztva a próbatöltés nagyságával megkapjuk a minden $\mathbf{r}(x,y,z)$ pontban érvényes elektromos erőteret (vektortér!):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|}$$

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

Ismétlés: Nyugvó töltések elektrosztatikus mezője



$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \sum_i \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 \cdot q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \sum_i \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r})\end{aligned}$$

➡ Az egyes ponttöltések által létrehozott elektromos terek összeadódnak vektoriálisan:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r})$$

Töltéssűrűség

25-1 TÁBLÁZAT A töltéseloszlások jelölése

Eloszlás	Szimbólum	Egység	Elemi töltés
Pontszerű töltés	q	C	q
Vonalmenti	λ	C/m	$dq = \lambda dx$, ahol dx egy elemi vonalszakasz
Felületmenti	σ	C/m ²	$dq = \sigma dA$, ahol dA egy elemi felület*
Térfogati	ρ	C/m ³	$dq = \rho dV$, ahol dV egy elemi térfogat*

* A felületet és a térfogatot úgy kell megválasztani, hogy bennük a töltés sűrűsége állandó legyen.

➤ Integrális alak:

Töltés típusa	Töltéssűrűség	Elemi töltés (dq)
Térfogati (3D)	$\rho(\mathbf{r}') \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$	$\rho(\mathbf{r}') dV'$
Felületi (2D)	$\sigma(\mathbf{r}') \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$	$\sigma(\mathbf{r}') dA'$
Vonalas (1D)	$\lambda(\mathbf{r}') \left[\frac{\text{C}}{\text{m}} \right]$	$\lambda(\mathbf{r}') d\ell'$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \lambda(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\ell'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dA'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

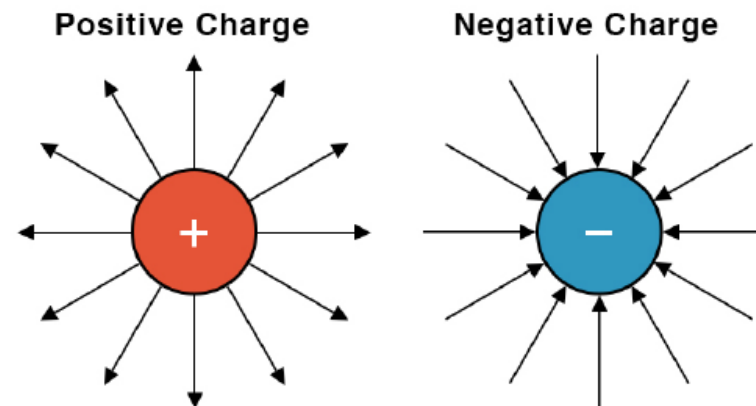
Ismétlés: Erővonalak

Irány: A próbatöltésre ható erő iránya

Sűrűség: Arányos az elektromos tér nagyságával

- A (+) töltésnél kezdődnek és a (-) töltésnél érnek véget, vagy végtelennél is kezdődhetnek vagy végződhetnek.
- Nem keresztezik egymást és nem válnak szét
- A vezető anyagokba nem hatolnak be (vezető belsejében $E=0$)

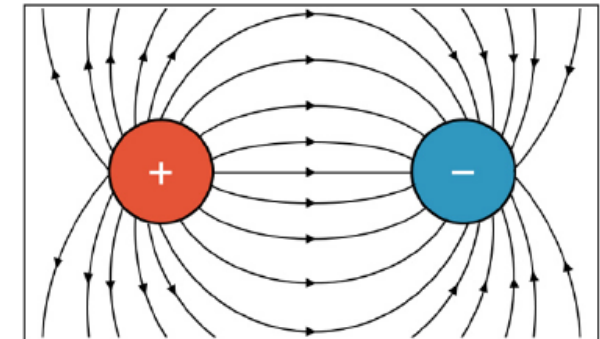
Electric Field Lines



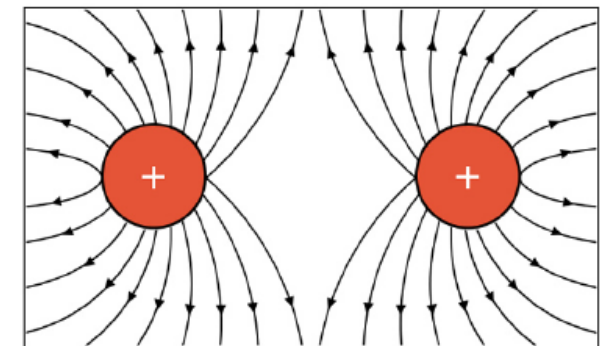
ScienceTech.net

Electric Field Lines for Point Charges

(a) Between Two Equal and Opposite Charges

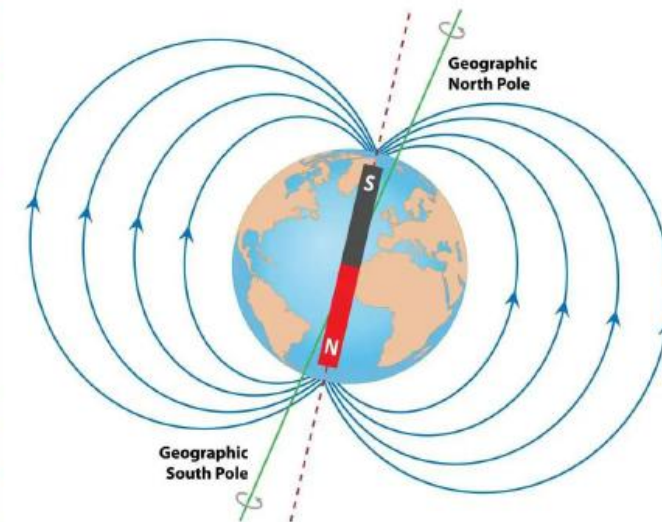
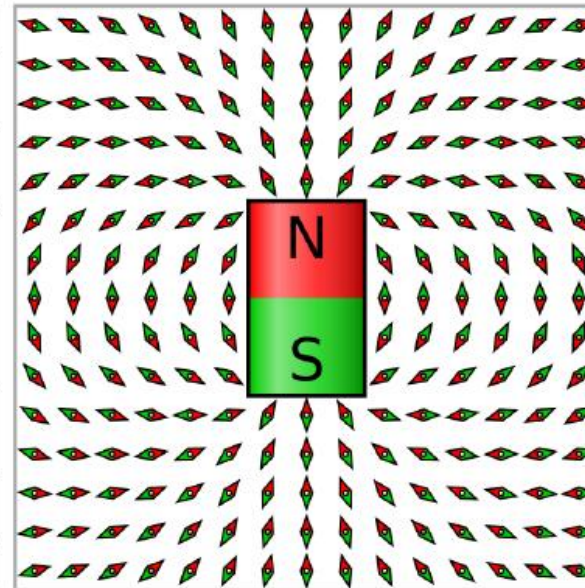
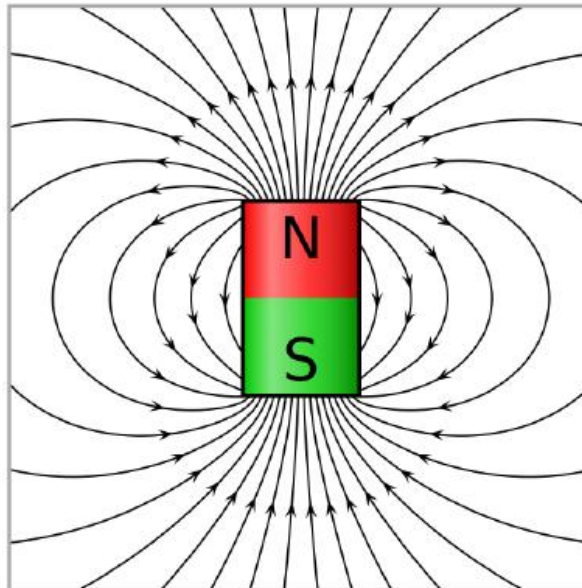
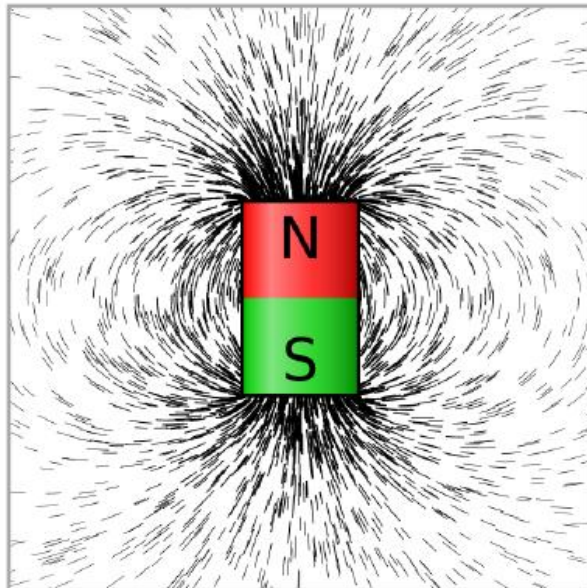
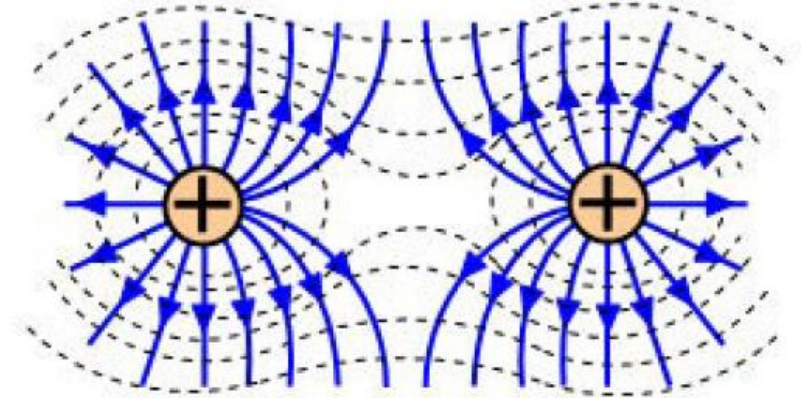
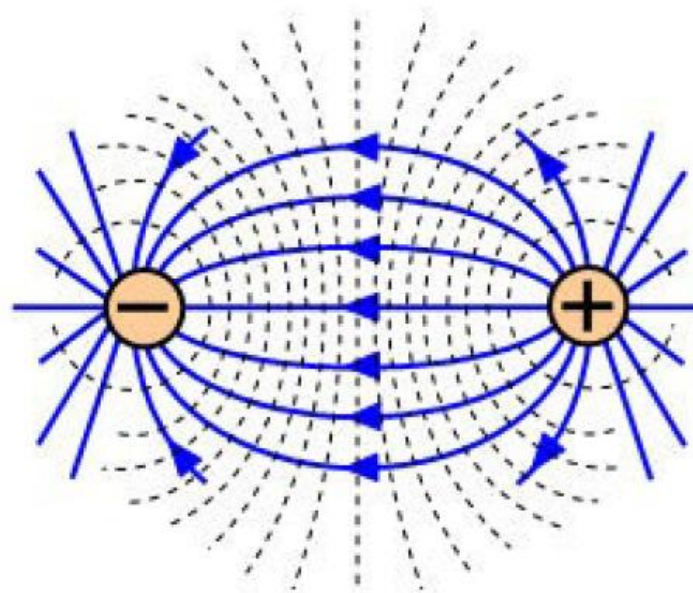
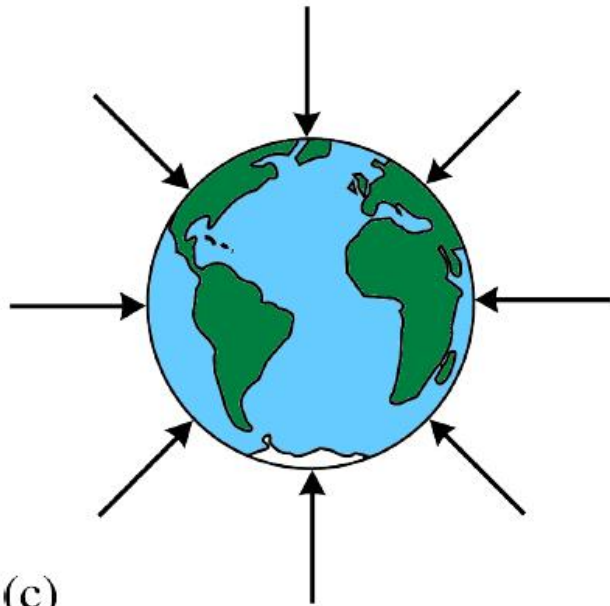


(b) Between Two Equal and Like Charges



ScienceTech.net

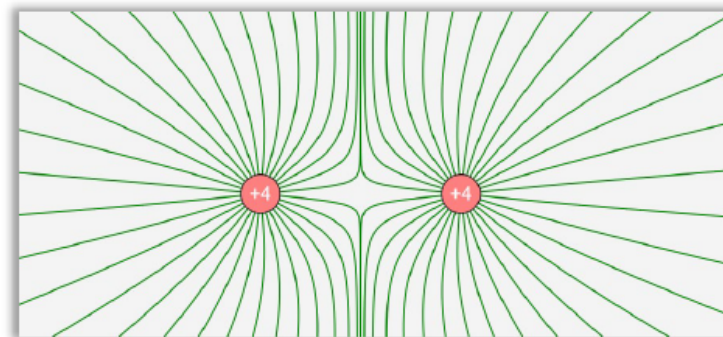
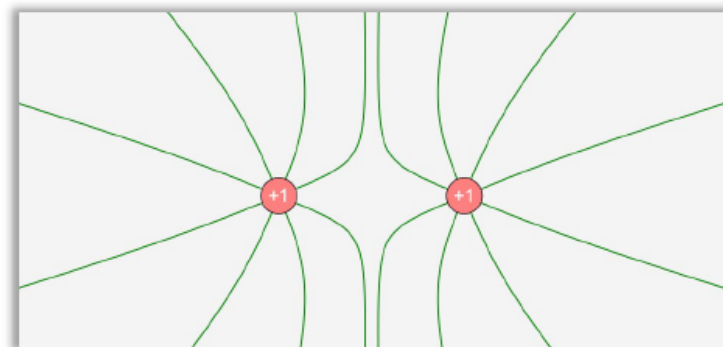
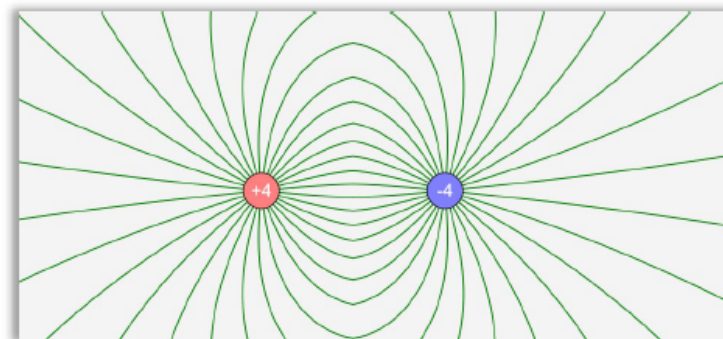
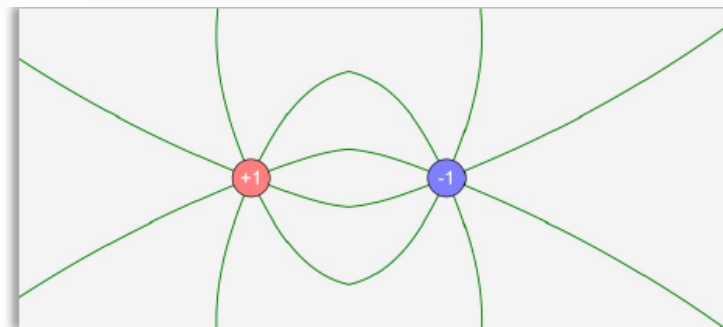
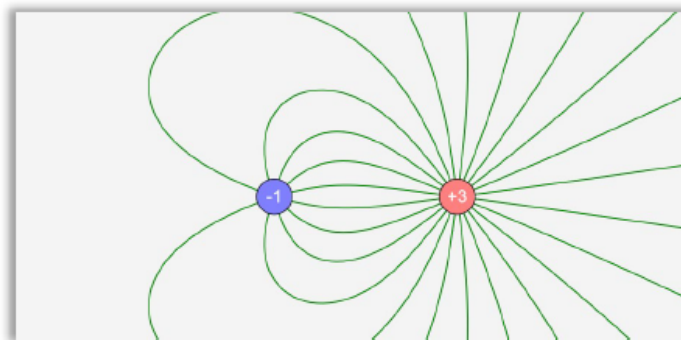
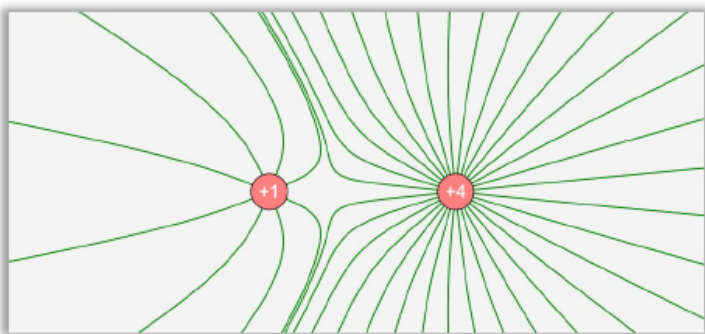
Erővonalak:



Elektromos erővonalak:

A próbatöltésre ható erő iránya

1. A (+) töltésnél kezdődnek és a (-) töltésnél érnek véget, vagy végtelennél is kezdődhetnek vagy végződhetnek.
2. A vonalak száma arányos az elektromos térerősség nagyságával.
3. Nem keresztezik egymást és nem válnak szét
4. Merőlegesen kezdődnek vagy végződnek a vezető anyag felületén
5. A vezető anyagokba nem hatolnak be (vezető belsejében $\mathbf{E}=0$)



https://javalab.org/en/electric_field_line_en/

➤ Rotációmentes tér => létezik (skalár)potenciál, aminek a negatív gradiense adja a térerősséget.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$\text{Unit of } \mathbf{E} = \frac{\text{Unit of } V}{\text{Unit of distance}} \Rightarrow 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

Az elektrosztatikus mező (nyugvó töltések által keltett elektromos tér) egy **konzervatív erőter**.

Ez azt jelenti, hogy az elektromos erők által végzett munka egy próbatöltés elmozdítása során **független a megtett úttól**, és kizárólag a kezdeti és a végpont helyzetétől függ.

$$W_{A \rightarrow B} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Az A -ból B -be végzett munka csak a két pont helyétől függ.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Bármely zárt hurok mentén a nettó munkavégzés nullával egyenlő.

Elektromos fluxus

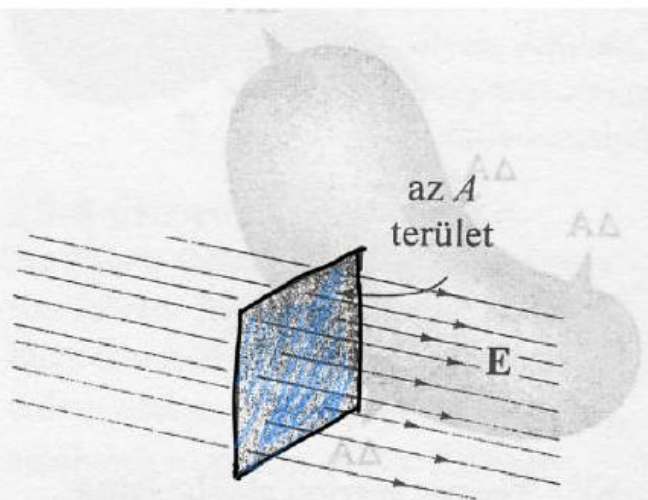
= Adott felületet metsző erővonalak száma

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

1. A felület merőleges az erővonalakra

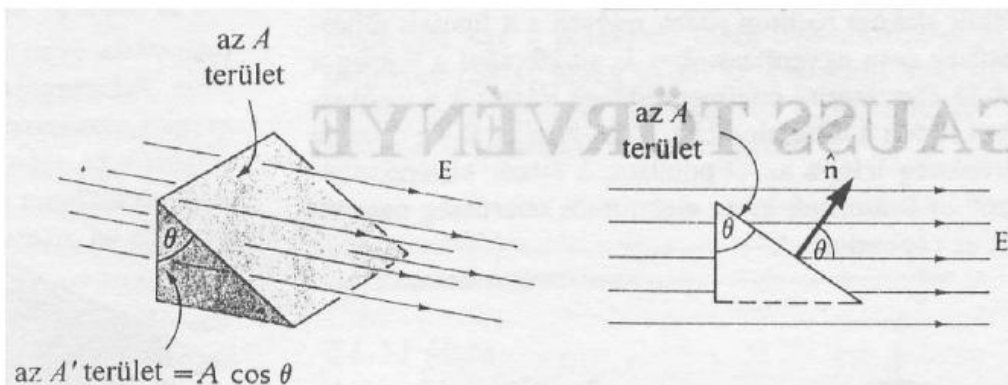
2. A felület nem merőleges az erővonalakra

3. A felület görbült



25-1 ábra

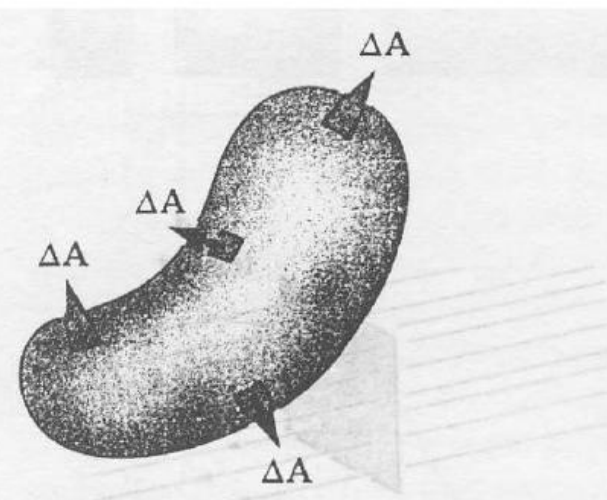
Az A területű síklap merőleges az $\mathbf{E}$ térerősségű homogén elektromos erőterre. Ezen a felületen az elektromos fluxus $\Phi_E = EA$.



a) Ha az A felületű síklap nem merőleges az $\mathbf{E}$ erővonalakra, akkor a vetülete $A' = A \cos \theta$.

b) Vegyük észre, hogy az A és A' közötti szög éppen egyenlő a felület $\hat{n}$ normálvektora és a térerősség $\mathbf{E}$ vektora által bezárt szöggel.

$$[\phi] = Vm = \frac{Nm^2}{C}$$



25-3 ábra

Zárt felület, néhány ΔA felületvektorral, melyek merőlegesek a felszínre és kifelé mutatnak.

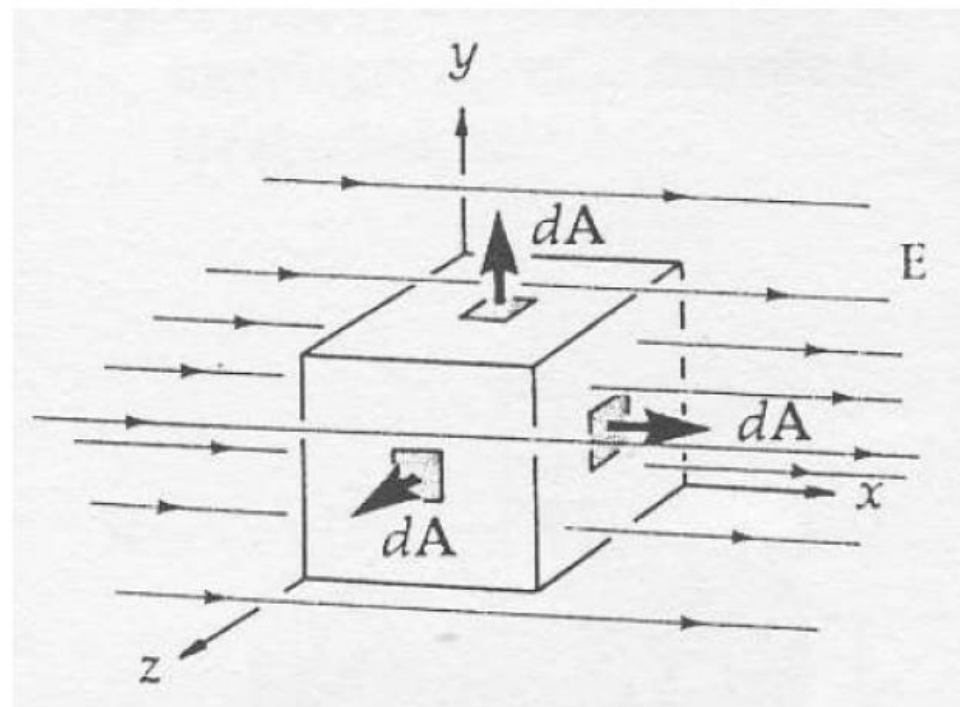
Fluxus zárt felületen, homogén **E** térben

Adott **E** térerősségű, x irányú, homogén elektromos tér. Mekkora fluxus az ábrán látható kocka teljes felületére?

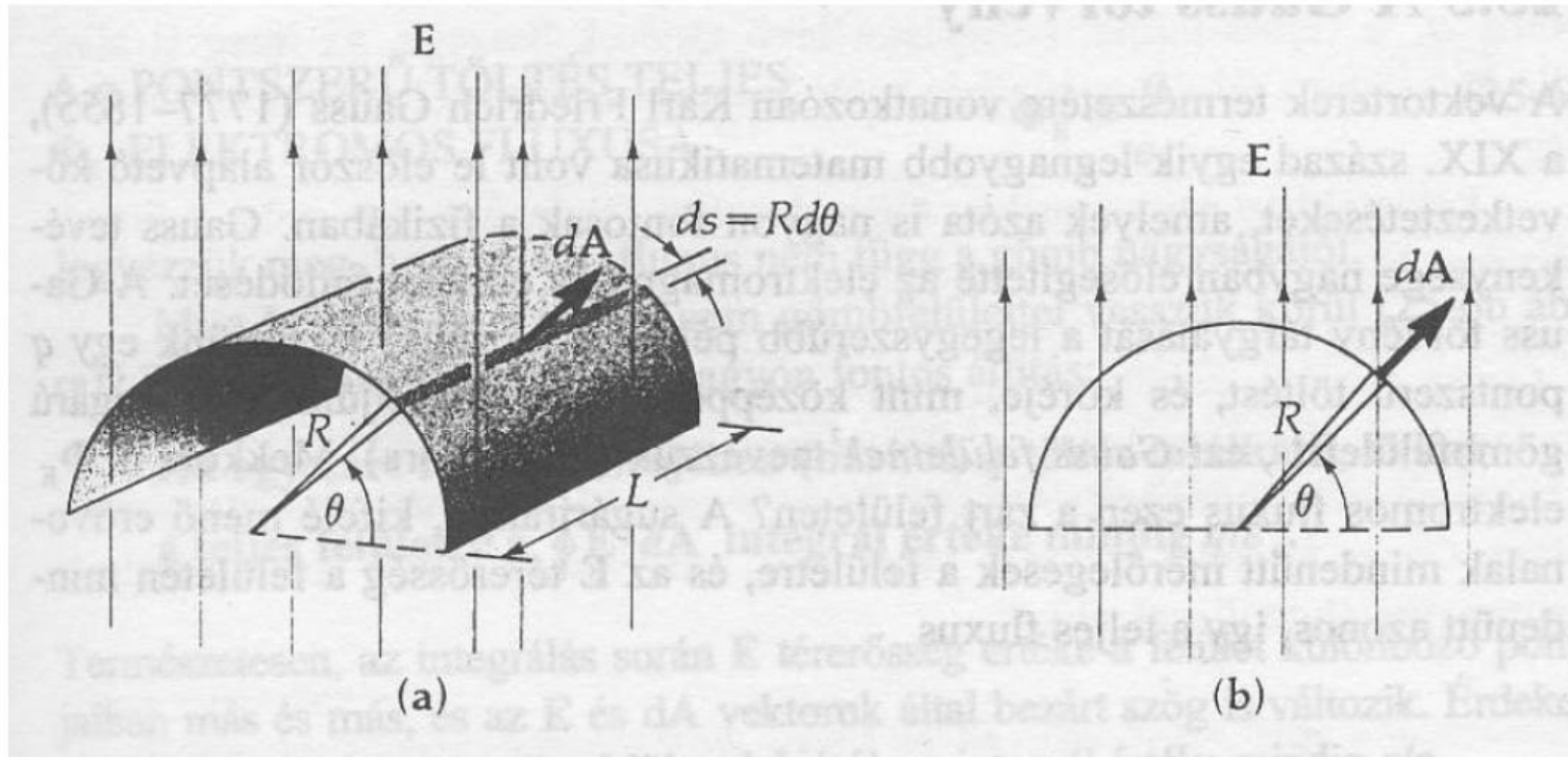
$\sim EA \cos \theta$

$$\Phi_E = (-E \cdot A) + (+E \cdot A) + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$



Fluxus zárt felületen, homogén $\mathbf{E}$ térben

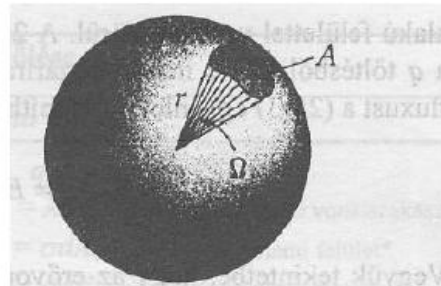


$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Gauss törvény

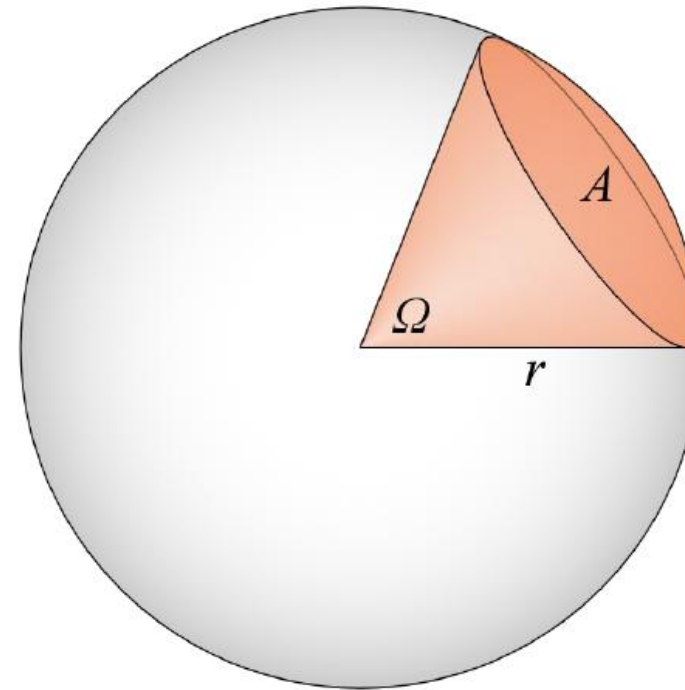
= Töltések számlálása helyett elég ismerni az elektromos teret.

Szükséges fogalom:
Térszög (szteradián)



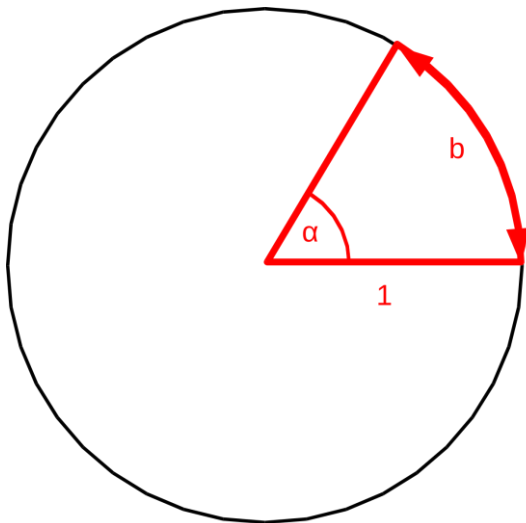
b) A térszög definíciója:
 $\Omega = A/r^2$ (szteradián egységekben), ahol A annak a felületnek a nagysága, amelyet az r sugarú gömb középpontjából Ω térszög alatt látunk. Egy térszögelemre:
 $\Delta\Omega = \Delta A/r^2$ (szteradián egységekben). Az A felület bármilyen alakú lehet, de minden pontban merőleges kell hogy legyen a sugárra. Minthogy a gömb felülete $4r^2\pi$, a teljes gömbfelület
 $\Omega = 4r^2\pi / r^2 = 4\pi$ szteradián térszögnek felel meg. Az Ω térszög a középpontból kiinduló és a ΔA felülettel meghatározott kúp alakú tartománnyal szemléltethető.

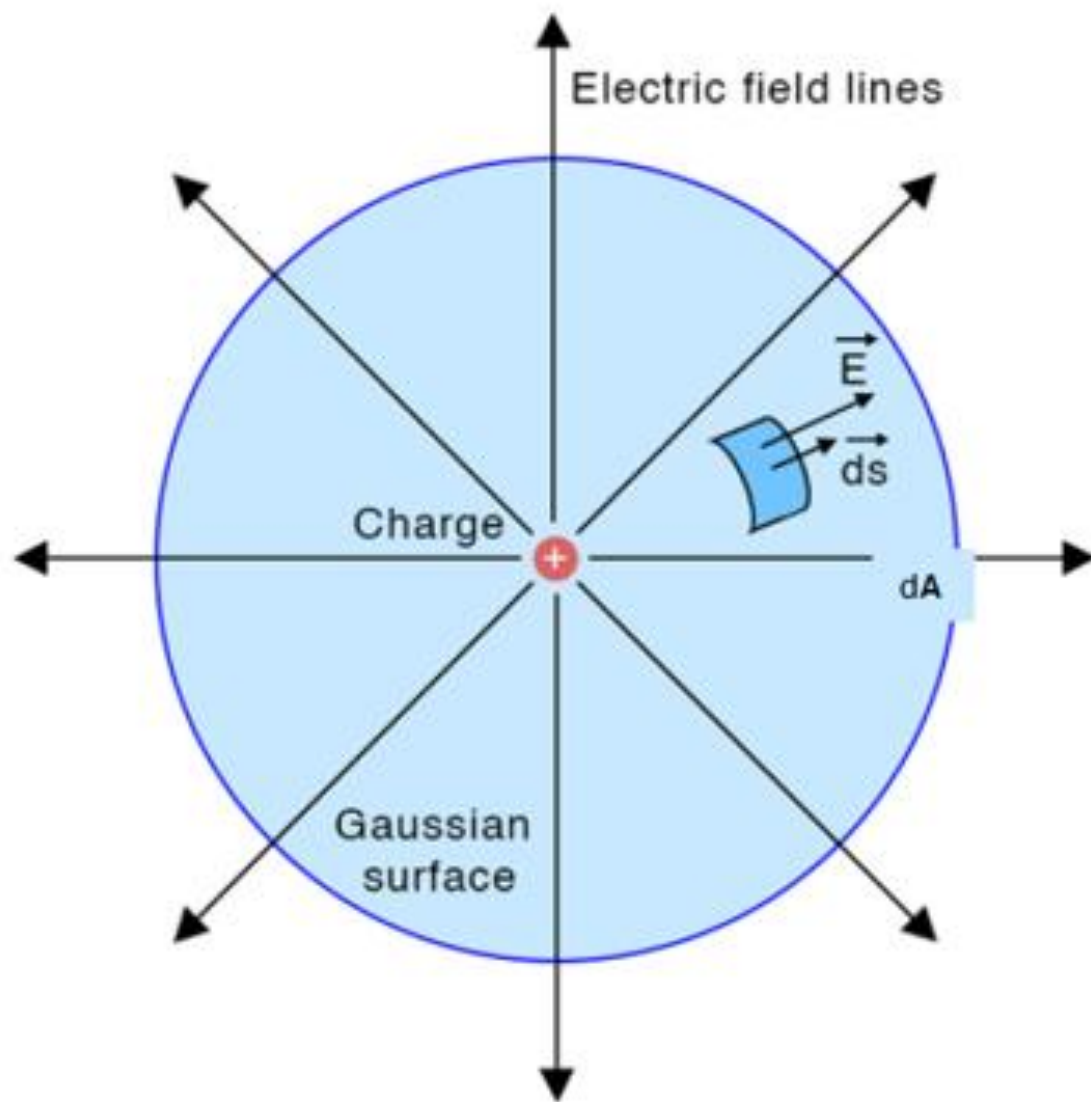
$$\Omega = 1sr \rightarrow A = r^2$$



Teljes gömbfelület: $\Omega = 4\pi$

➤ Radián:





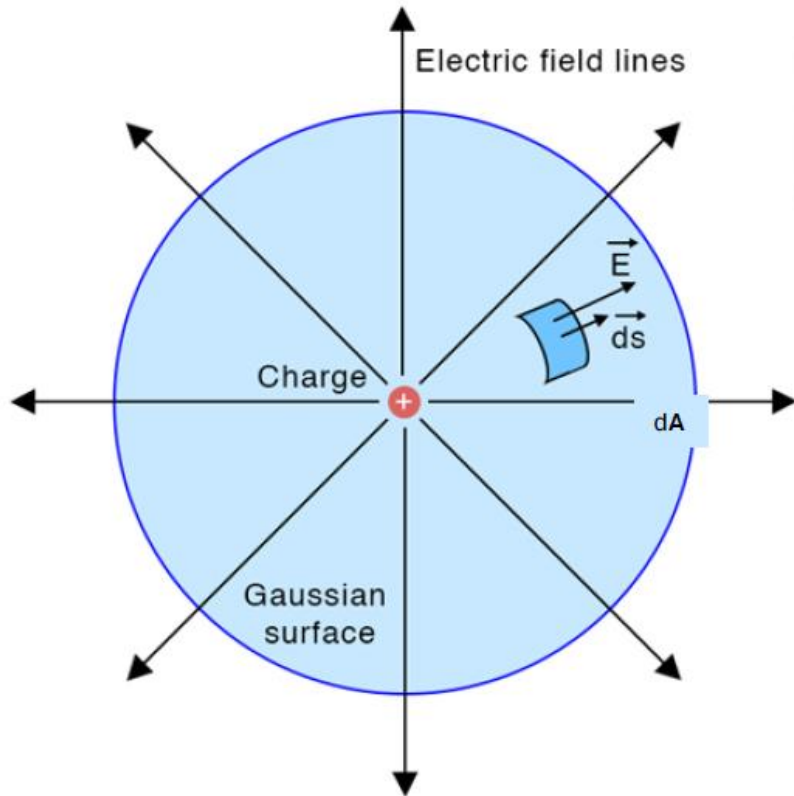
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_f}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_f|}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

$$\Phi_E = EA = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \right) (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Gauss törvény

= Töltések számlálása helyett elég ismerni az elektromos teret.

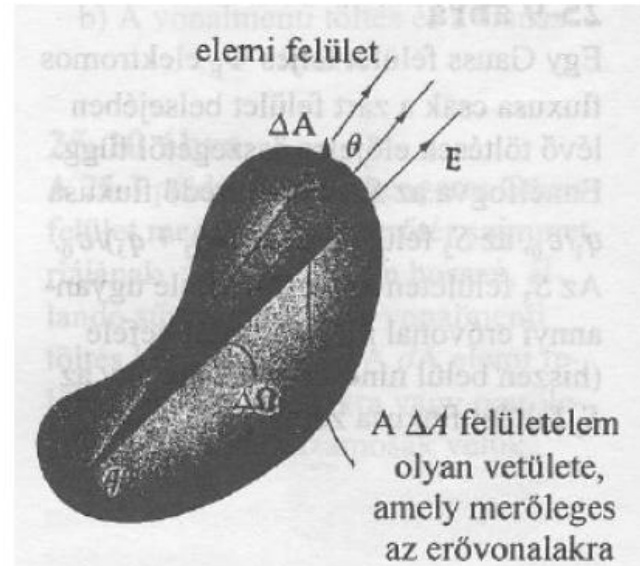


A q PONTSZERŰ TÖLTÉS TELJES
 Φ_E ELEKTROMOS FLUXUSA

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ha egy zárt felület belsejében (bárhon) q töltés található, akkor a teljes felületre a $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ integrál értéke mindig q/ϵ_0 .

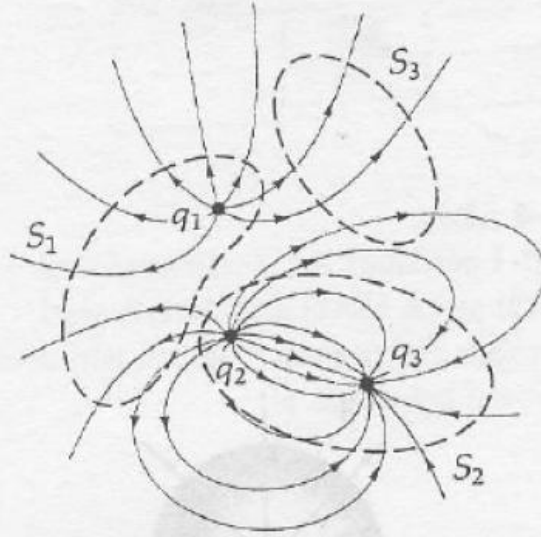


25-8 ábra

Az ábra q töltést körülvevő önkényesen felvett felületet mutat. A ΔA felületelem nem merőleges a q -ból induló erővonalakra. A $\Delta A'$ -vel jelölt vetület, amelynek nagysága $\Delta A' = \Delta A \cos \theta$, merőleges az erővonalakra, és így meghatározza a $\Delta \Omega = (\Delta A \cos \theta) / r^2$ térszögelemet. A ΔA elemi felület a q töltés helyéről $\Delta \Omega$ térszög alatt látszik.

Gauss törvény

= Töltések számlálása helyett elég ismerni az elektromos teret.



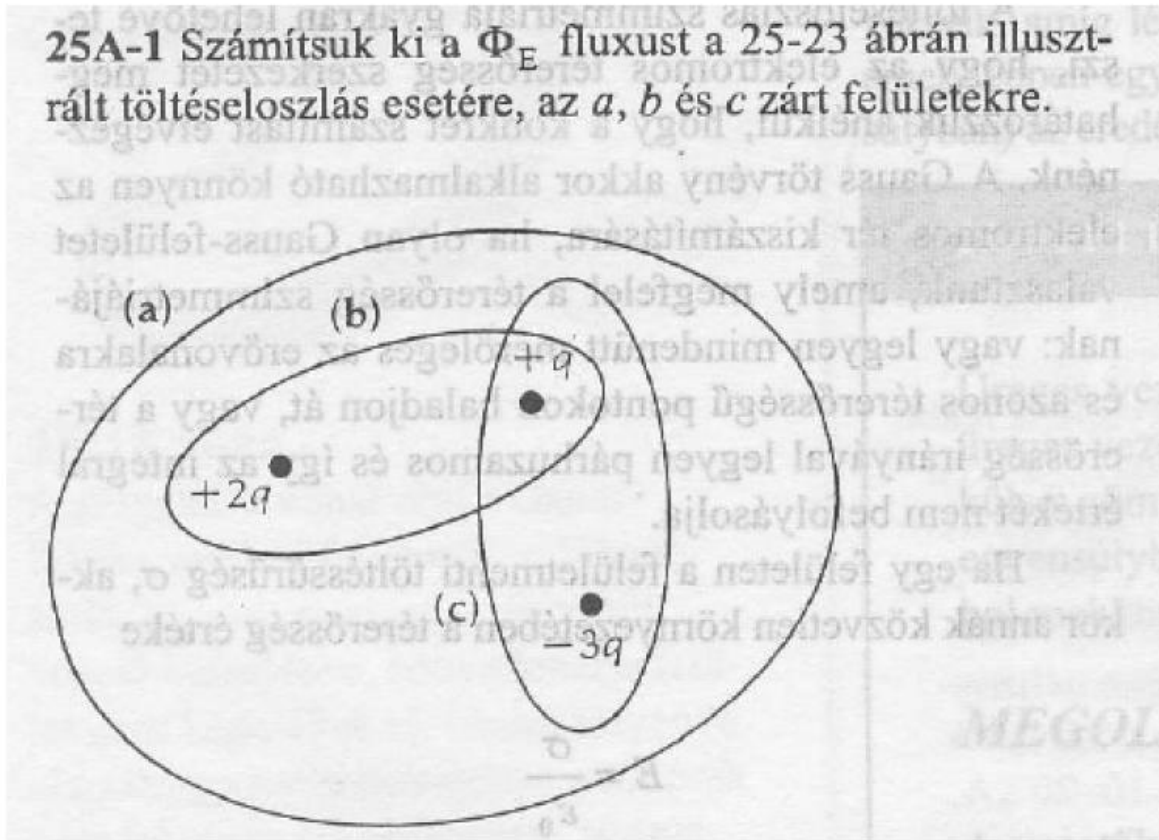
25-9 ábra

Egy Gauss felület teljes Φ_E elektromos fluxusa csak a zárt felület belsejében lévő töltések előjeles összegétől függ. Ennélfogva az S_1 felület eredő fluxusa q_1/ϵ_0 , az S_2 felületé pedig $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$. Az S_3 felületen keresztül kifelé ugyanannyi erővonal megy át mint befelé (hiszen belül nincsen töltés) és így az S_3 felület fluxusa zérus.

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Feladat:

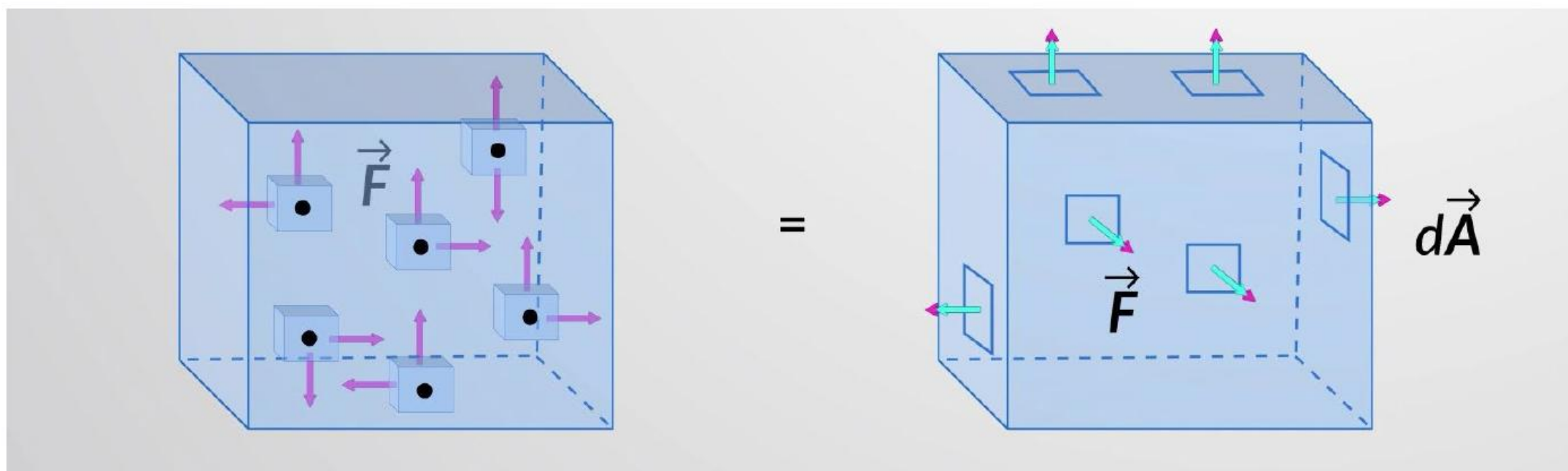
25A-1 Számítsuk ki a Φ_E fluxust a 25-23 ábrán illusztrált töltéseloszlás esetére, az a , b és c zárt felületekre.



$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel (Divergencia-tétel)

$$\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{A} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$



Maxwell I.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Tökéletesen vezető anyagokban!

Jelentés:

- Az elektromos tér forrása az elektromos töltés.
- Egy adott $\mathbf{r}(x,y,z)$ pontban az elektromos tér divergenciája arányos a pontban lévő töltéssűrűséggel.

AND GOD SAID

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

AND THERE WAS LIGHT



- Létezik elektromos monopólus (+ és – ponttöltés).
- Az elektromos tér forrásai az elektromos töltések.
- Differenciális alak:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{CGS} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

- Integrális alak:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Holografikus elv: a fizikai jellemzőknek a vizsgált tartomány határán történő meghatározásával lehet figyelembe venni a nem ismert tartományokban uralkodó töltéssűrűséget.

- Gauss-felület:

- **Zárt felület:** Olyan alakzat (például gömb vagy henger), amelynek van belseje és külseje, és teljesen körbevesz egy teret vagy töltést.
- **Egyszerűsítés:** A megfelelő Gauss-felület kiválasztásával a bonyolult matematikai integrálok nagyon könnyen kiszámíthatók a szimmetria miatt.
- **Alkalmazás:** Főleg az elektrosztatikában használják a töltések által keltett elektromos mező meghatározására.

➤ Gauss-felület: Miért használjuk a Gauss-felületet?

A Gauss-törvény integrális alakja kimondja, hogy egy zárt S felületen átmenő elektromos fluxus egyenlő a felület által bezárt $Q_{\text{bezárt}}$ töltés és a vákuum-permittivitás hányadosával:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{bezárt}}}{\epsilon_0}$$

Ha a töltéeloszlás **magas fokú szimmetriával** rendelkezik, a Gauss-felület okos megválasztásával a bal oldali bonyolult felületi integrál egy egyszerű szorzássá csupaszítható: $E \cdot A$.

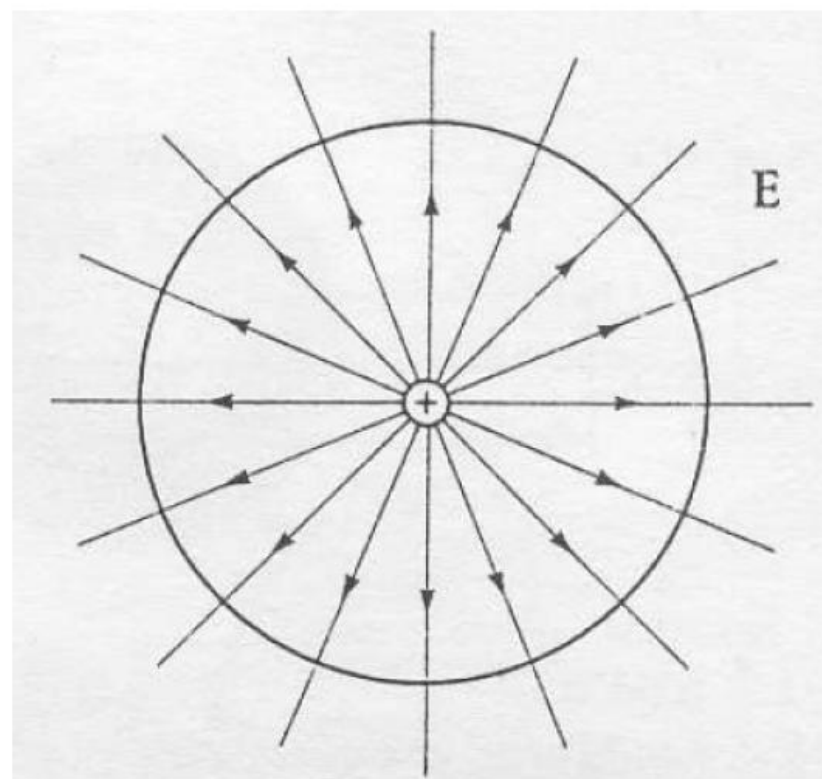
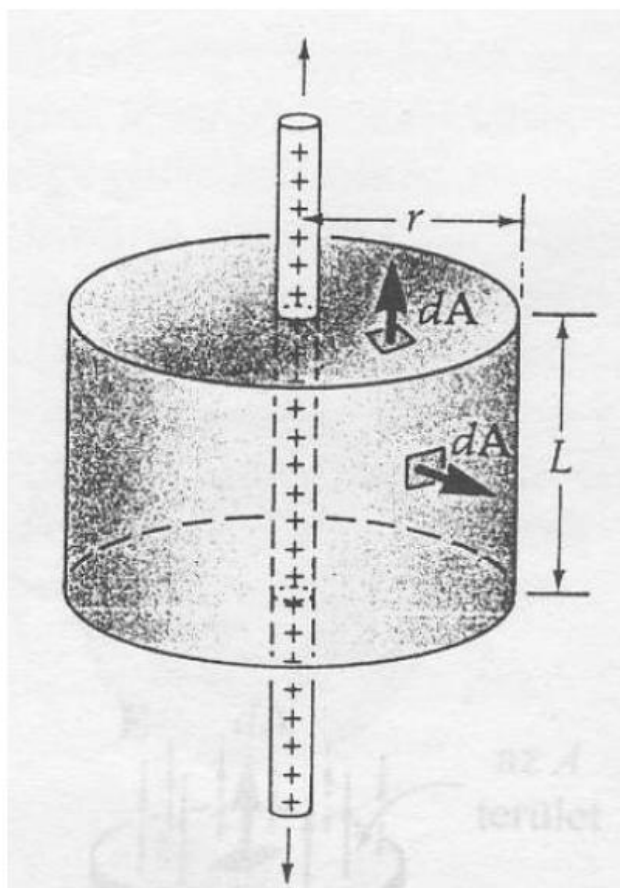
A jó Gauss-felület tulajdonságai

Egy jó Gauss-felületet úgy választunk meg, hogy illeszkedjen a rendszer szimmetriájához. Ehhez két fő feltételnek kell teljesülnie a felület egyes részein:

1. A térerősség nagysága ($|\mathbf{E}|$) konstans a felületen (vagy annak egy részén).
2. A térerősség-vektor ($\mathbf{E}$) és a felületelem normálvektora ($d\mathbf{A}$):
 - Párhuzamosak ($\mathbf{E} \parallel d\mathbf{A} \implies \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA$), ekkor a fluxus maximális.
 - Merőlegesek ($\mathbf{E} \perp d\mathbf{A} \implies \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$), ekkor a fluxus ezen a szakaszon nullával egyenlő.

Töltéssűrűség – végtelen töltött rúd elektromos tere

Pozitív töltések helyezkednek el egyenletesen egy végtelen hosszú egyenes mentén. A vonalmenti töltéssűrűség λ . Számítsuk ki az $\mathbf{E}$ térerősséget az egyenestől r távolságban.



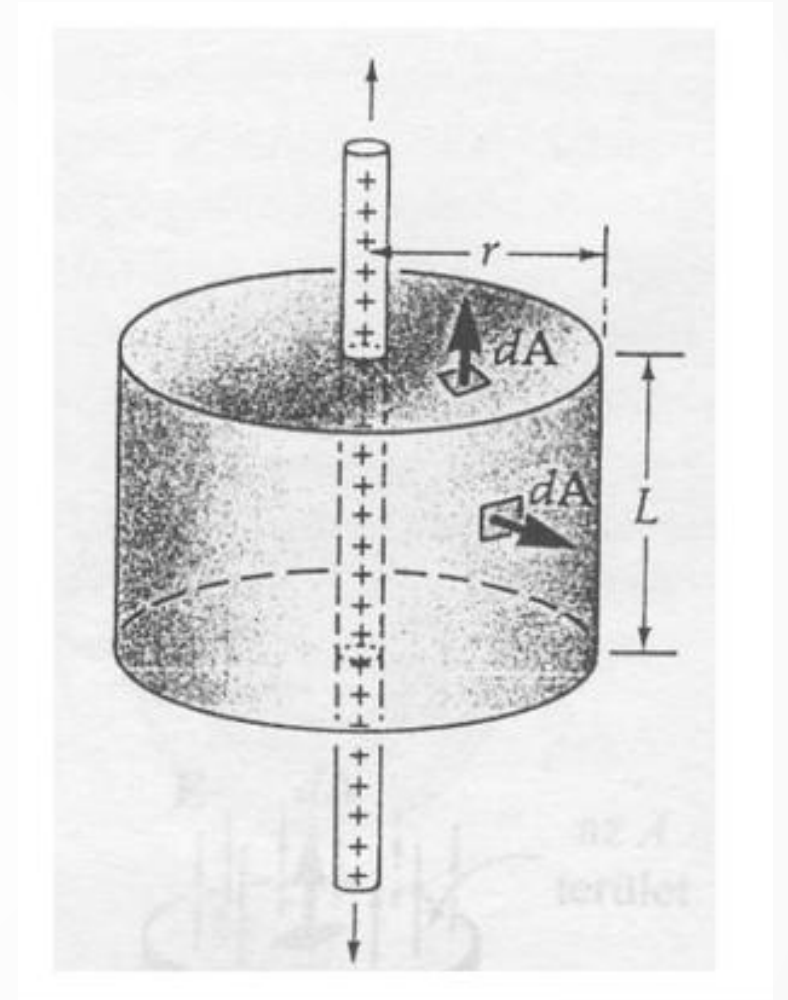
➤ A hengeren belül $q_b = \lambda L$ töltés van.

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\text{a hengerpalástra}} \mathbf{E} d\mathbf{A} + \oint_{\text{a véglapokra}} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi rL) + 0 = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



➤ Homogén töltéssűrűségű gömb tere:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

➤ Két esetet különböztetünk meg:

1. A gömbön kívül ($r \geq R$)
2. A gömbön belül ($r < R$)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{bezárt}}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(r) \oint_S dA = E(r) \cdot (4\pi r^2)$$

1. Eset: A gömbön kívül ($r \geq R$)

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

2. Eset: A gömbön belül ($r < R$)

$$Q_{\text{bezárt}} = \rho \cdot V_{\text{Gauss}} = \rho \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

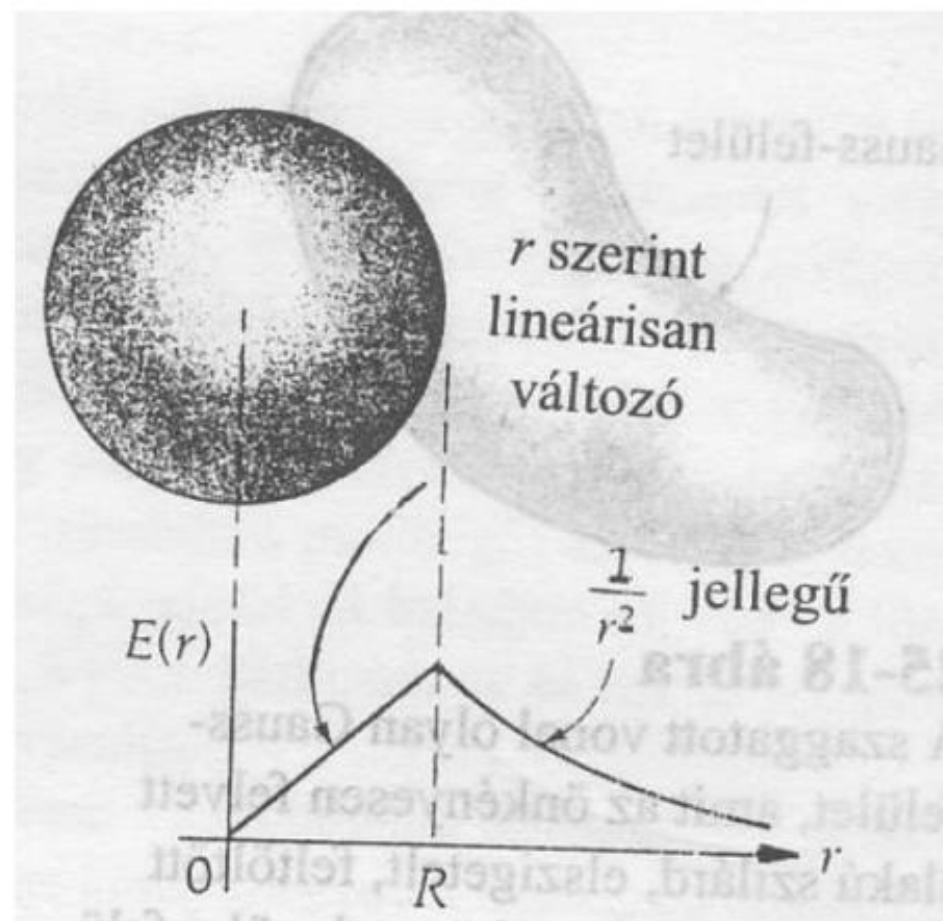
$$Q_{\text{bezárt}} = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{bezárt}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot r}{R^3}$$

Következtetés: A gömb belsejében az elektromos térerősség lineárisan növekszik a középponttól mért r távolsággal. A középpontban ($r = 0$) a térerősség nulla.

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot r}{R^3} \hat{\mathbf{r}}, & \text{ha } r < R \quad (\text{lineáris növekedés}) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, & \text{ha } r \geq R \quad (\text{négyzetes csökkenés}) \end{cases}$$



Gauss törvény és az elektromos vezetők

Elektrosztatikus egyensúly:

Az elektromos erőter a vezetőkben a töltéseket szabadon mozgatja.

Elektromos erőterbe helyezett vezetőben lévő töltések nagyon gyorsan elrendeződnek a vezető felületén (egyensúlyi állapot), úgy hogy a vezető belsejében a külső térrel ellentétes tér jön. A két tér kioltja egymást, így a vezető belsejében az elektromos tér 0.

