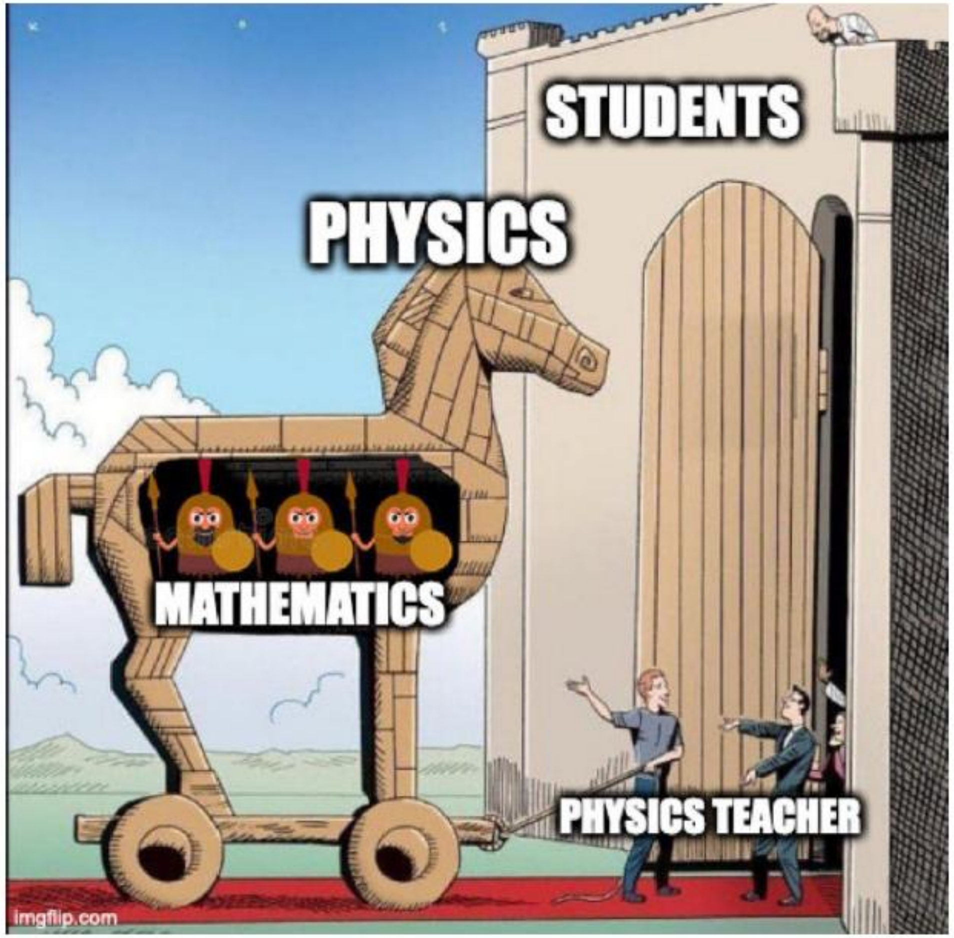
Fizika 2. előadás
Elektromágnesség és optika
-
Vektoranalízis

Buzás Attila
okleveles geofizikus, PhD
HUN-REN-ELTE Űrkutató Kutatócsoport
HUN-REN Földfizikai és Űrtudományi Kutatóintézet
atilatbuzas@ttk.elte.hu

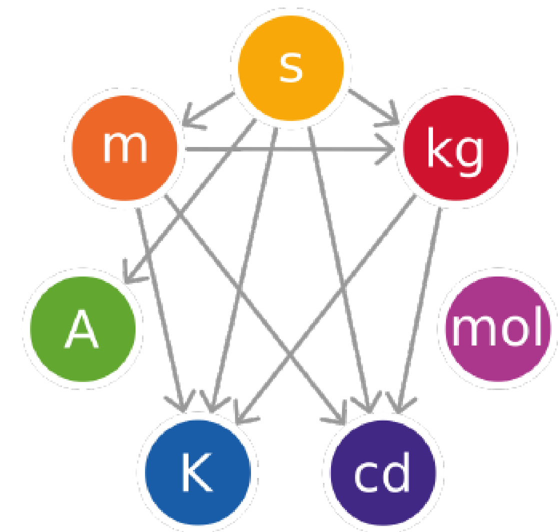
2026–2027
Budapest

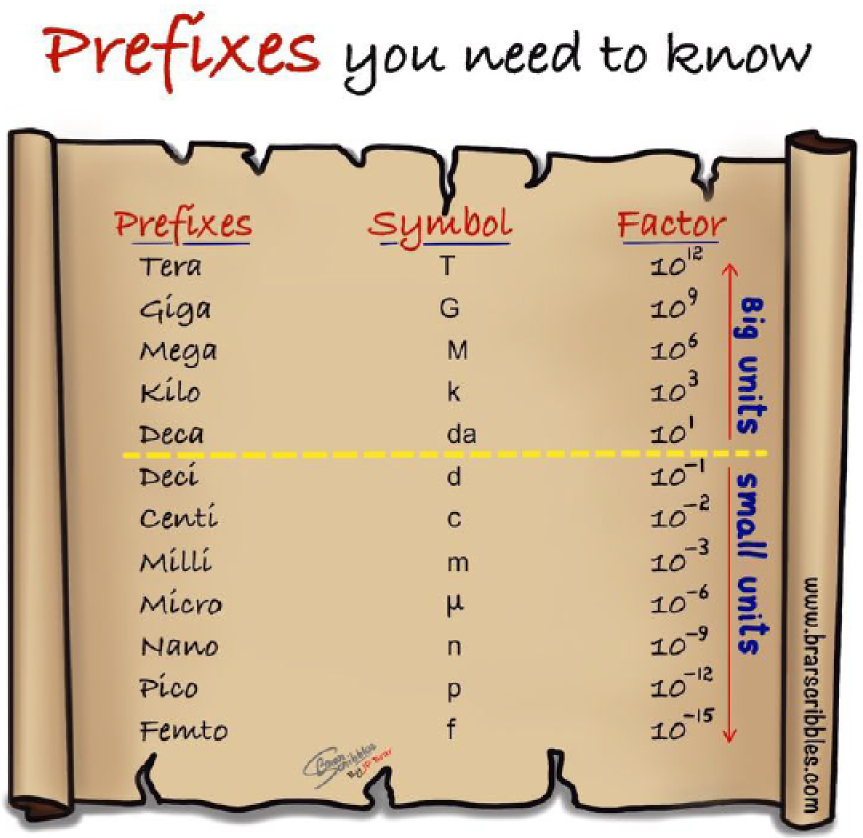
Matematika - Vektoranalízis



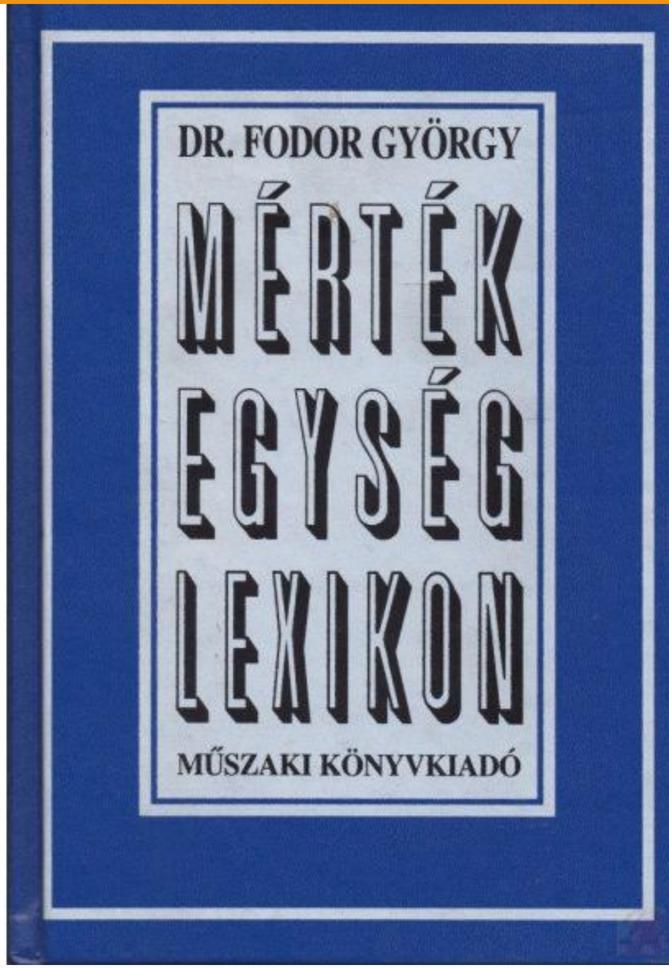
Name	Symbol	Quantity	Definition other units	Definition SI base units
radian	rad	plane angle		–
steradian	sr	solid angle		–
hertz	Hz	frequency		s^{-1}
newton	N	force, weight		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
pascal	Pa	pressure, stress	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
joule	J	energy, work, heat	N·m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
watt	W	power, radiant flux	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
coulomb	C	electric charge		s·A
volt	V	voltage, electrical potential difference, electromotive force	W/A J/C	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
farad	F	electrical capacitance	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
ohm	Ω	electrical resistance, impedance, reactance	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
siemens	S	electrical conductance	1/Ω	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
weber	Wb	magnetic flux	J/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
tesla	T	magnetic field strength	Wb/m^2 $V \cdot s/m^2$ N/(A·m)	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
henry	H	inductance	Wb/A V·s/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
degree Celsius	°C	temperature relative to 273.15 K	$T_K - 273.15$	K
lumen	lm	luminous flux	cd·sr	cd
lux	lx	illuminance	lm/m^2	$m^{-2} \cdot cd$
becquerel	Bq	radioactivity (decays per unit time)		s^{-1}
gray	Gy	absorbed dose (of ionizing radiation)	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
sievert	Sv	equivalent dose (of ionizing radiation)	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$
katal	kat	catalytic activity		$s^{-1} \cdot mol$

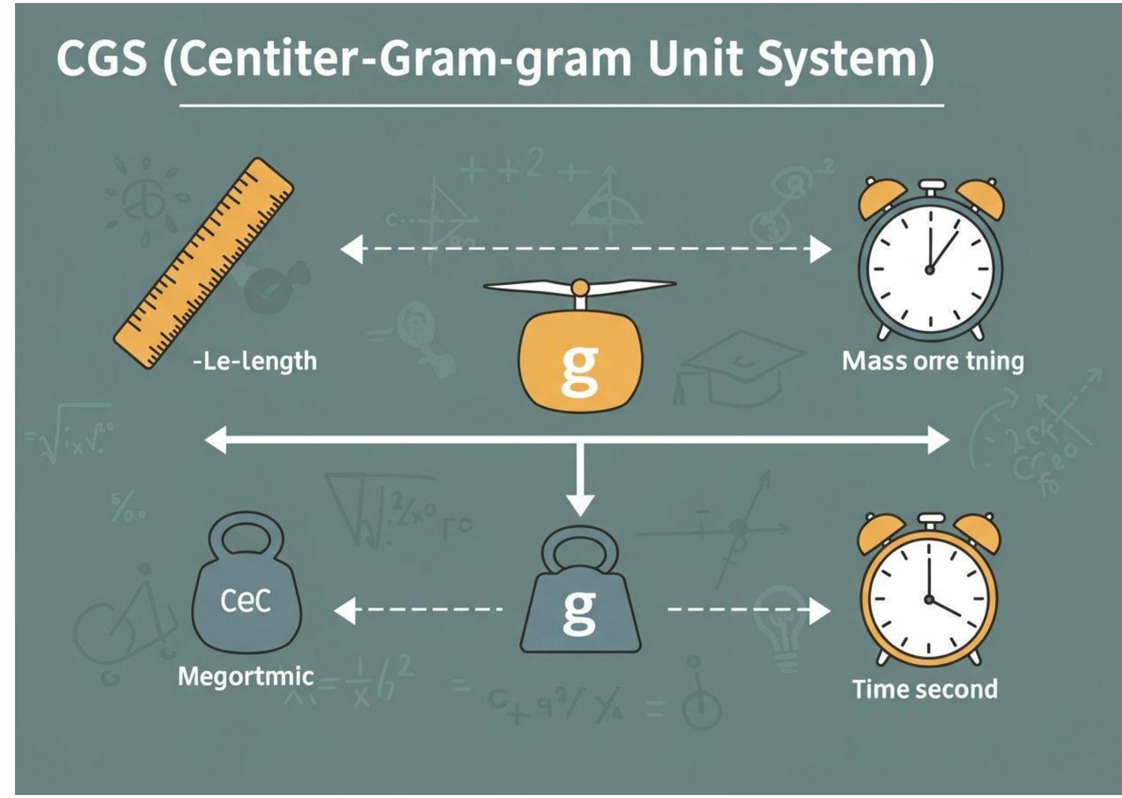
SI





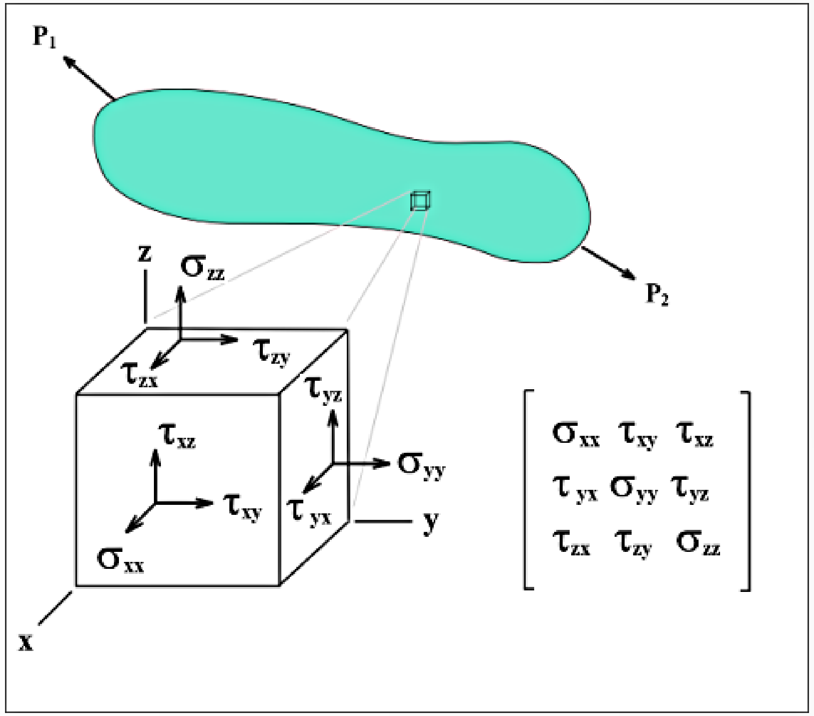
Prefixes	Symbol	Factor
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Deca	da	10^{1}
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}

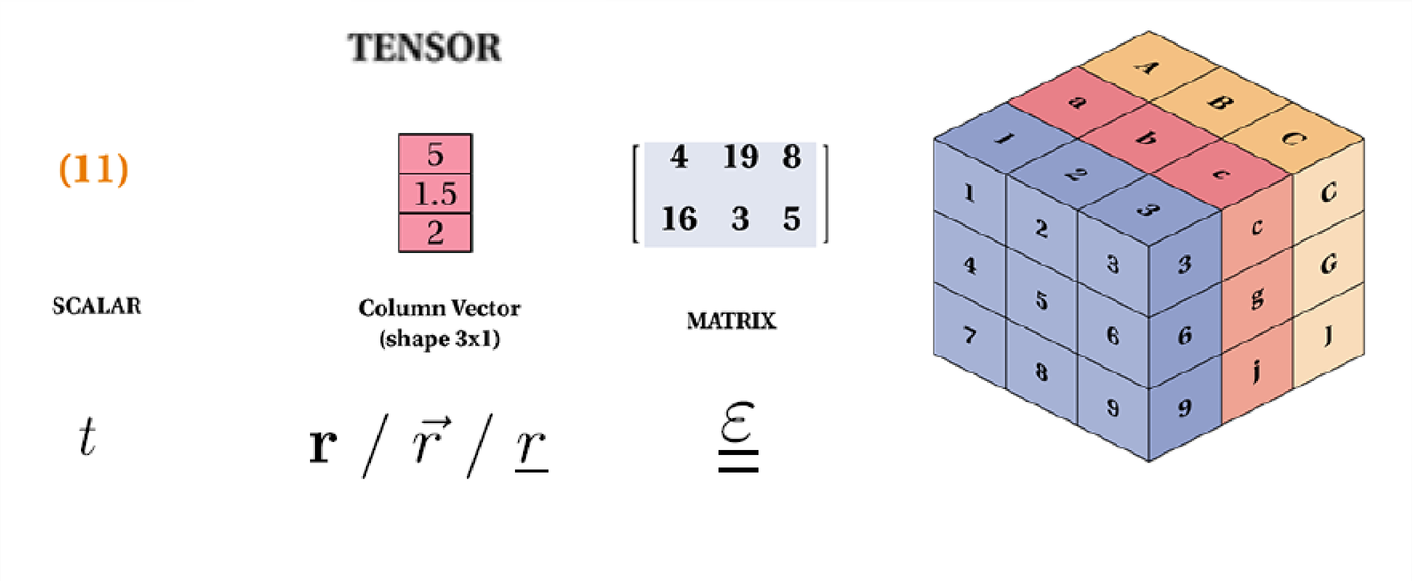




Physical Quantity	Symbol	SI Unit	CGS Unit	Conversion (SI to CGS)
Electric Charge	q	Coulomb (C)	Statcoulomb / Franklin (statC / Fr)	1 C≈3×109 statC
Electric Current	I	Ampere (A)	Statampere (statA)	1 A≈3×109 statA
Electric Potential / EMF	V,Φ	Volt (V)	Statvolt (statV)	1 statV≈300 V
Electric Field	E	Volt per meter (V/m)	Statvolt per cm (statV/cm)	1 statV/cm=3×104 V/m
Electric Displacement	D	Coulomb per m2 (C/m2)	Statcoulomb per cm2 (statC/cm2)	1 statC/cm2=12π×1051 C/m2
Magnetic Field Strength	H	Ampere per meter (A/m)	Oersted (Oe)	1 Oe=4π1000 A/m≈79.58 A/m
Magnetic Flux Density	B	Tesla (T)	Gauss (G)	1 T=104 G
Magnetic Flux	ΦB	Weber (Wb)	Maxwell (Mx)	1 Wb=108 Mx
Resistance	R	Ohm (Ω)	Statohm (statΩ)	1 statΩ≈9×1011 Ω
Capacitance	C	Farad (F)	Centimeter (cm) / Statfarad	1 F≈9×1011 cm
Inductance	L	Henry (H)	Stathenry (statH)	1 statH≈9×1011 H

- Tenzori jelleg:
  - 0. rendű tenzor (skalár): csak nagysága van, pl. tömeg, nyomás.
  - 1. rendű tenzor (vektor): van nagysága és iránya is, pl.: sebesség, erő.
  - 2. rendű tenzor (mátrix): Számok kétdimenziós táblázata (sorok és oszlopok).
  - n. rendű tenzorok: pl. színes videófelvétel adatrendszere.





- Oszlopvektor (mx1).

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

- Sorvektor (1xn).

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

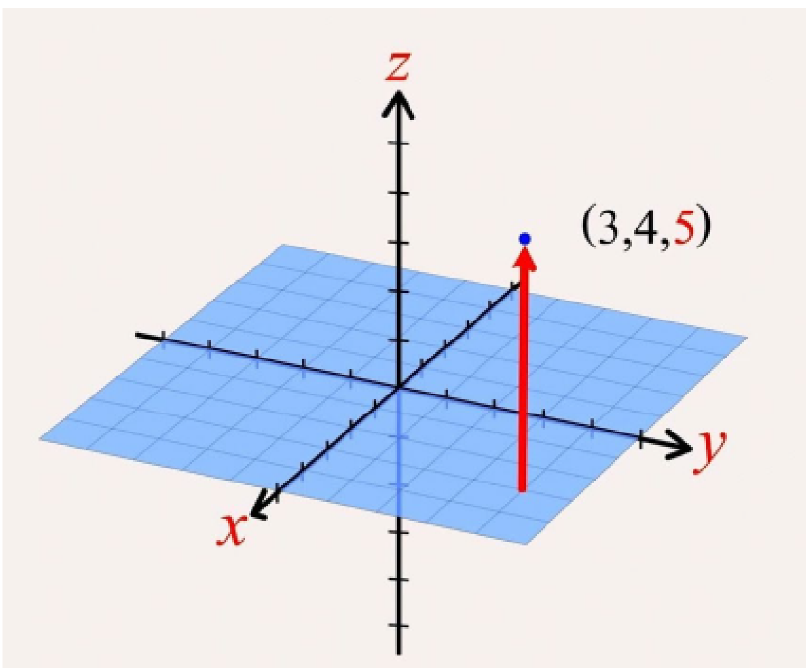
- Mátrix (nxm).

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Koordináta rendszerek

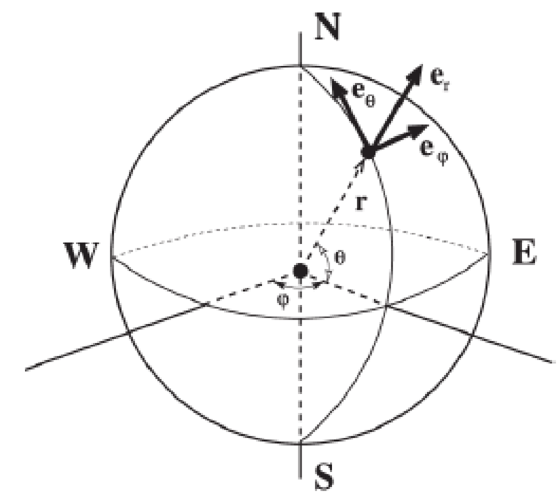
$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid -\infty < x, y, z < +\infty\}$$

Descartes-féle koordináta-rendszer

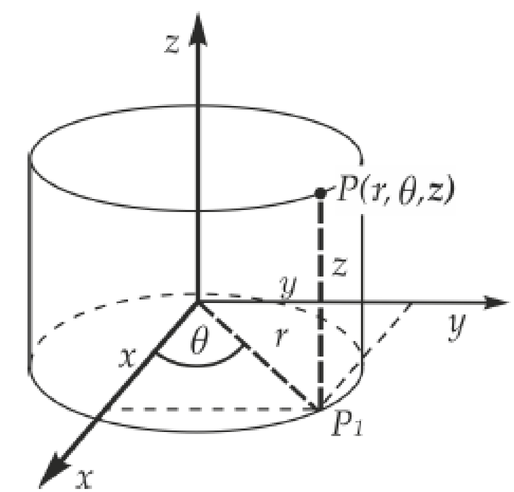


$$\mathcal{D} = \{(r, \phi, \vartheta) \,|\, 0 \leq r < +\infty, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi\}$$

Gömbi koordináta-rendszer



Henger koordináta-rendszer



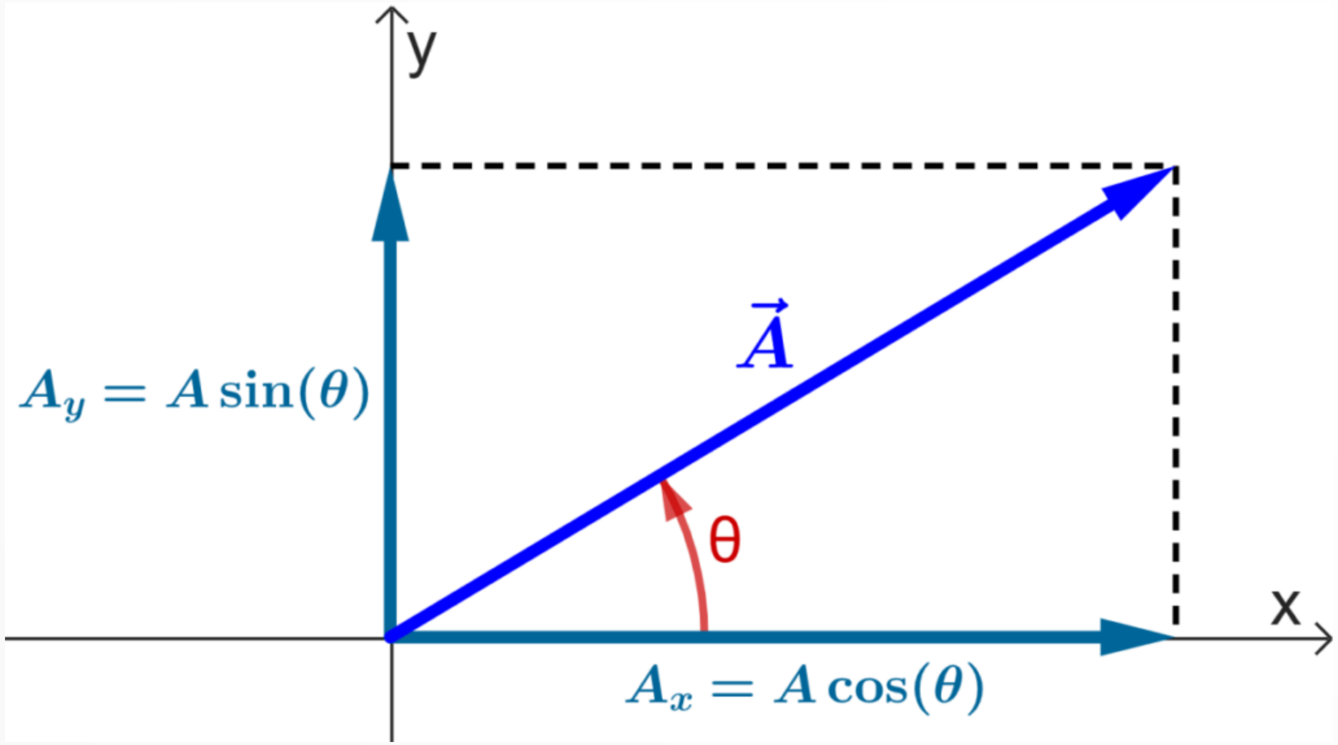
$$\mathcal{D} = \{(\varrho, \varphi, z) \,|\, 0 \leq \varrho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}$$

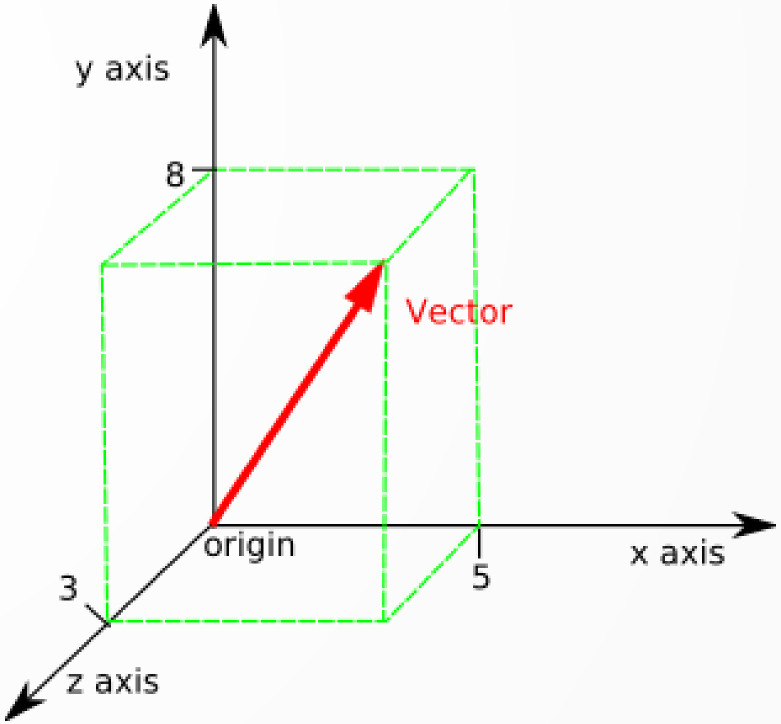
- Geometriai vektor:
  - Vektor nagysága:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

  - Két pont közötti távolság:

$$d = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



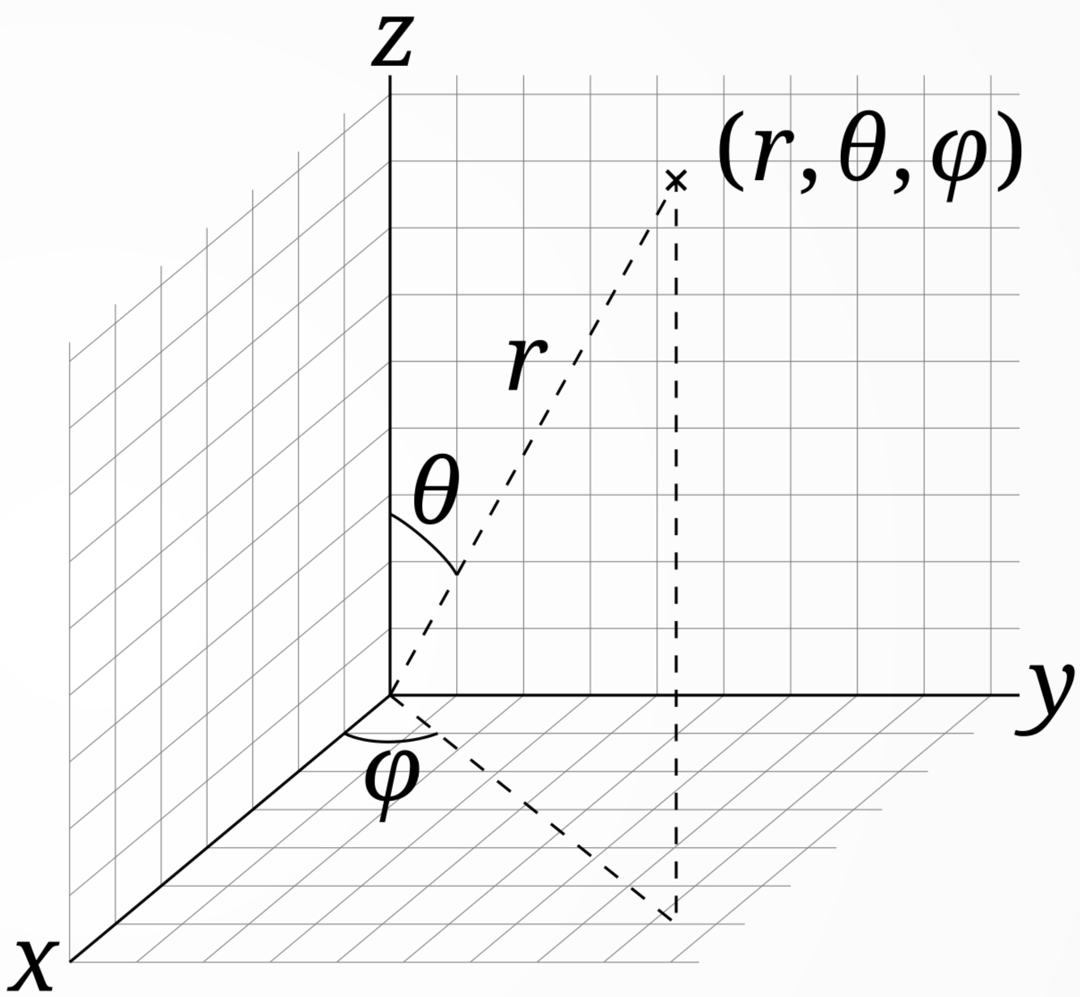


$v_x = r\ sin\theta cos\varphi$

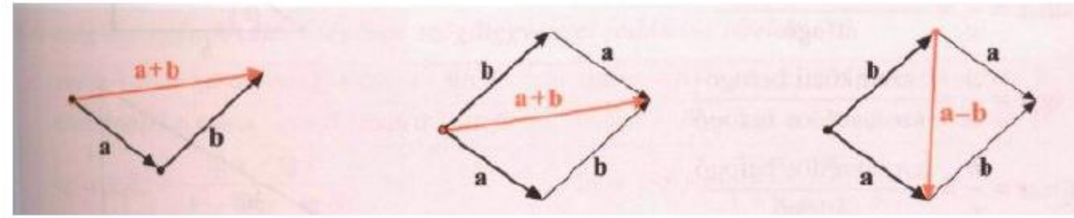
$v_y = r\ sin\theta sin\varphi$

$v_z = r\ cos\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

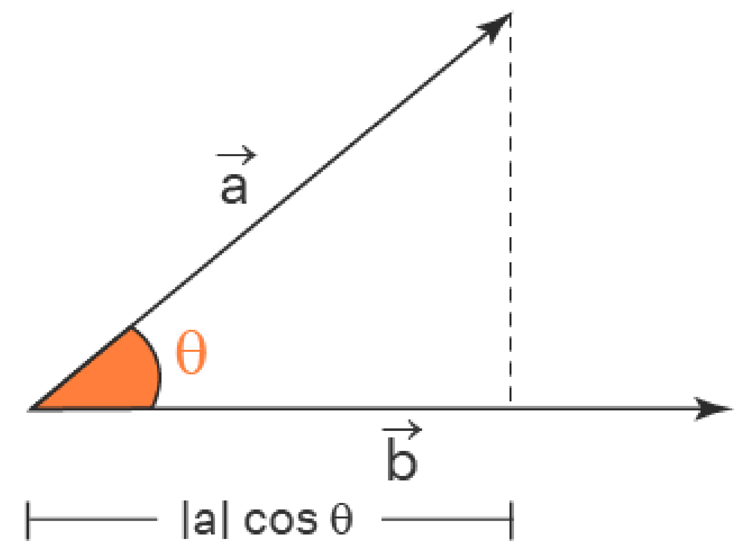


Vektor műveletek



- Két vektor skaláris szorzata:
  - Két vektorból „csinál” skalárt.
  - Két egymásra merőleges vektor skaláris szorzata mindig 0!

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$



$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{b} = |a|\,|b| \cos\theta}$$

- Két vektor vektoriális szorzata:
  - Két vektorból „csinál” vektort.
  - Két egymással párhuzamos vektor vektoriális szorzata mindig 0!

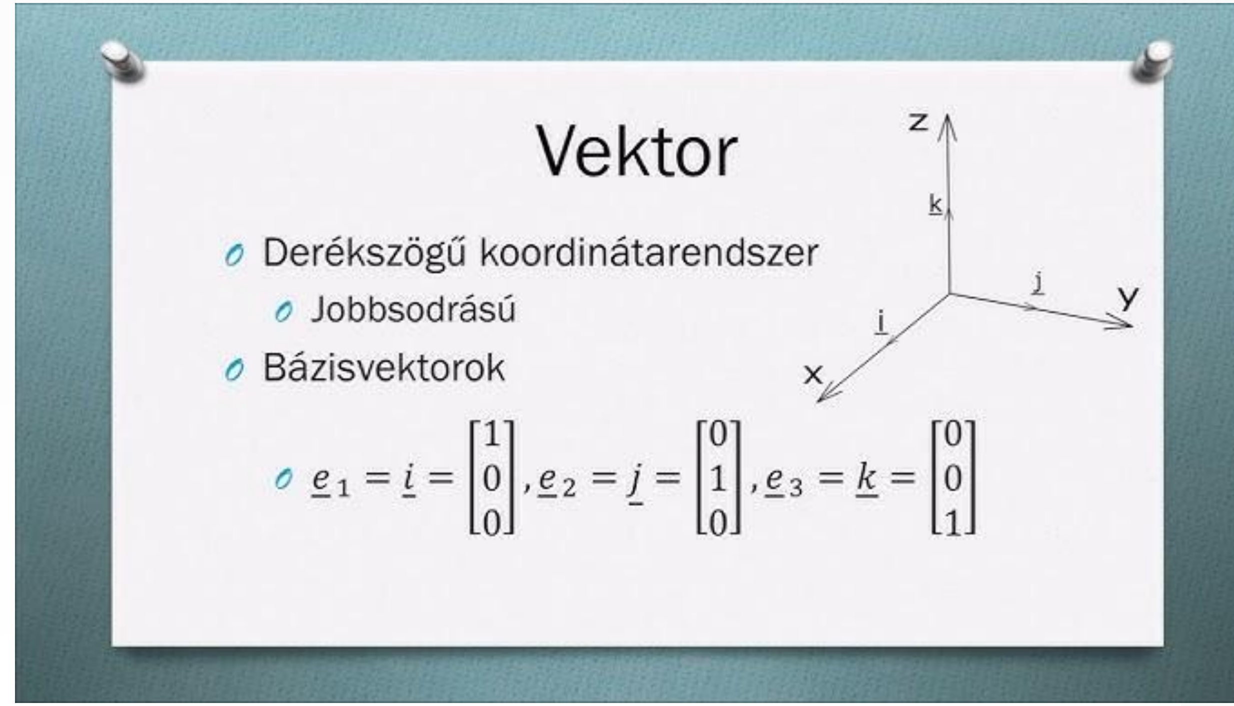
$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z) = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

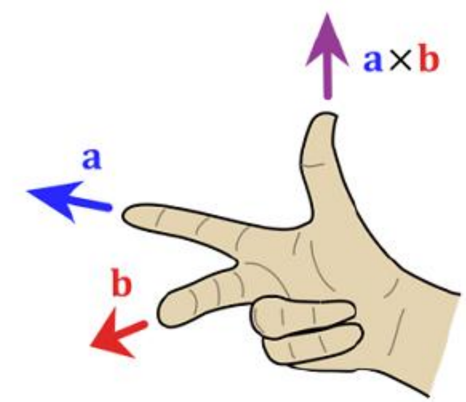
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

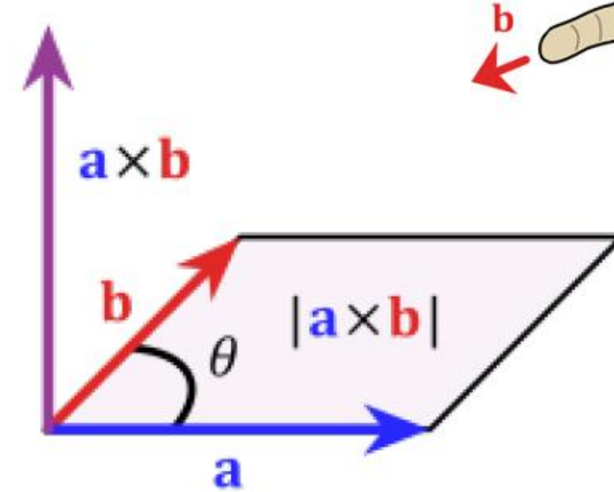
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y, \quad a_z b_x - a_x b_z, \quad a_x b_y - a_y b_x\right)$$



$$|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \sin\theta$$

$$|\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}|^2 + |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 |\vec{\mathbf{b}}|^2$$





- Két vektor diadikus szorzata („mátrixszorzás”):
  - Két vektorból (vagy mátrixból) „csinál” mátrixot.
  - A szorzat első tagjának az oszlopainak a száma meg kell, hogy egyezzen a szorzat második tagjának a sorainak a számával.
  - Az eredmény mátrix dimenziója az első tag sorainak és a második tag oszlopainak a számával fog megegyezni.

$$\vec{u} \otimes \vec{v}$$

$\vec{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ és $\vec{v} = \langle 4, 5, 6 \rangle$.

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

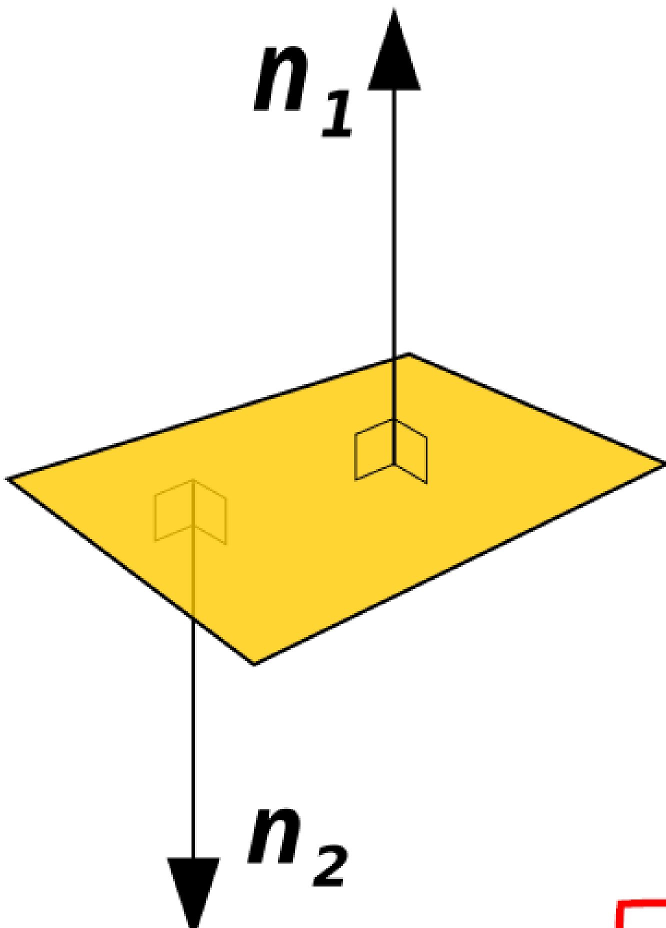
- Két mátrix szorzata:

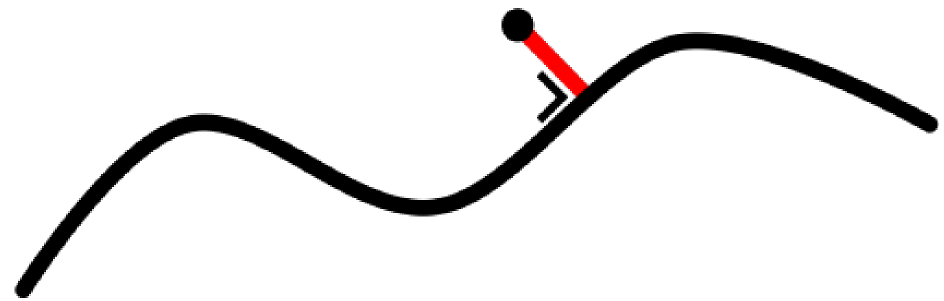
$$C = A \cdot B$$

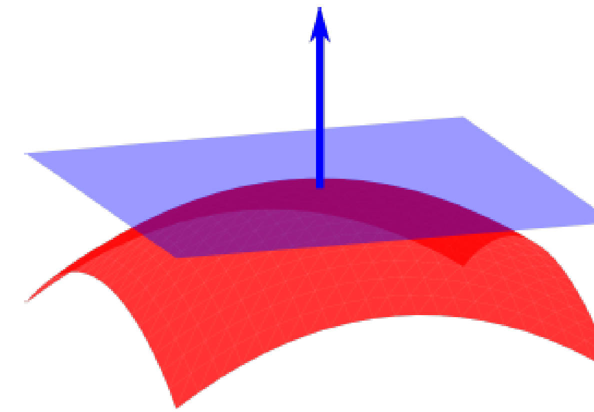
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

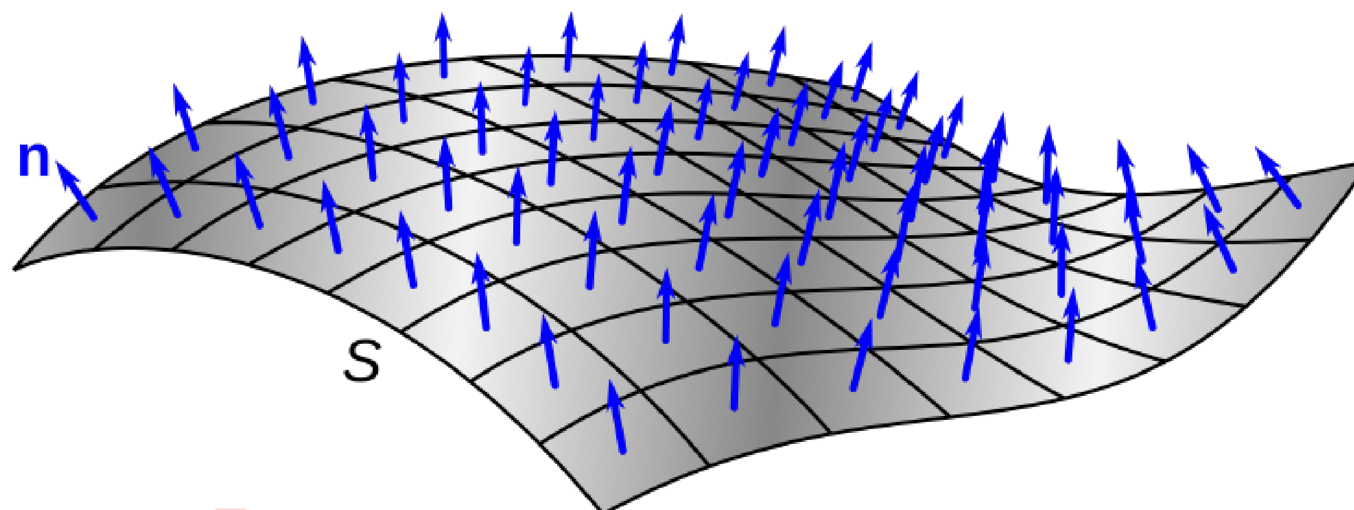
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Normál vektor





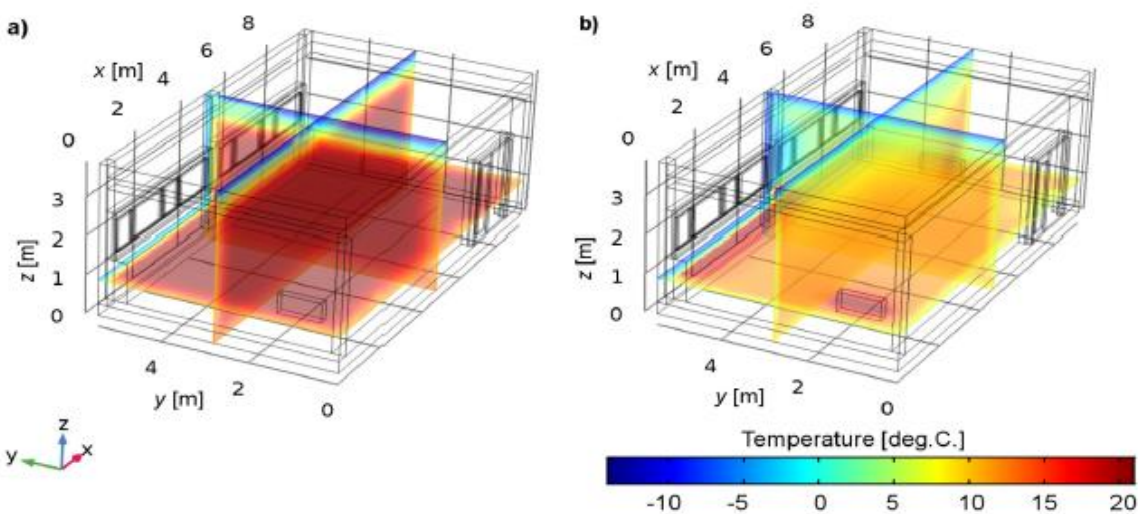


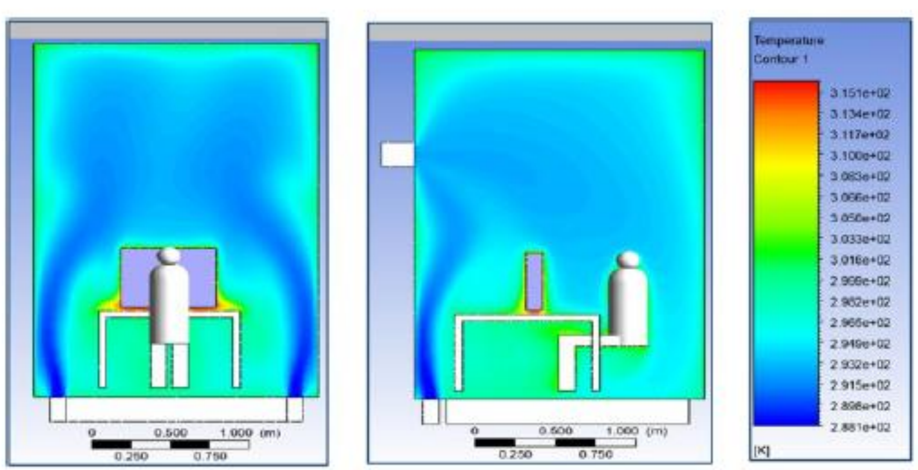


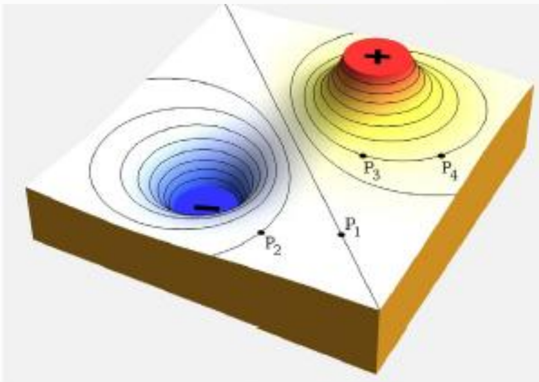
$$\boxed{\mathbf{A} = A \cdot \mathbf{n}}$$

Skalártér

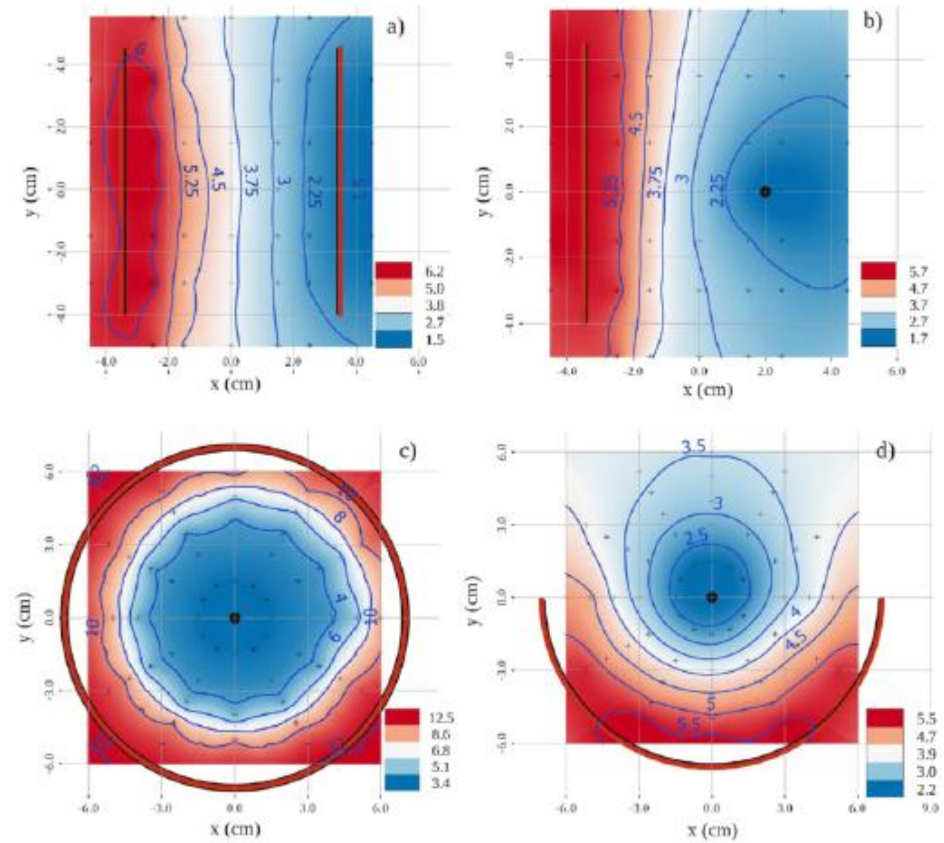
Hőmérséklet (T(r))





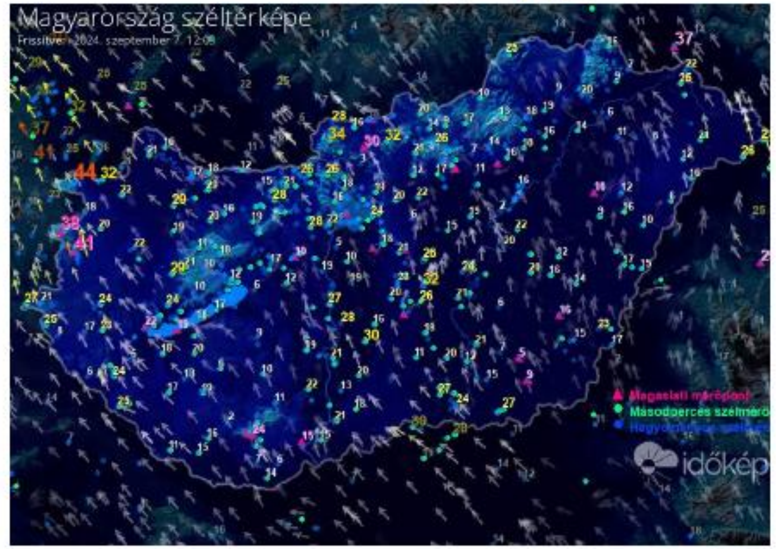


Elekromos potenciál (U(r))

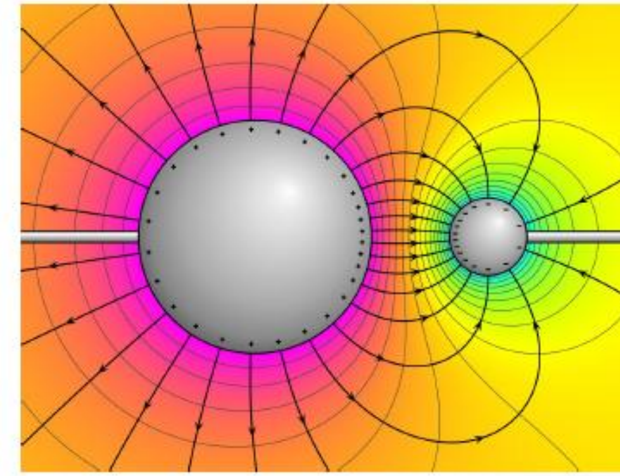


Vektortér

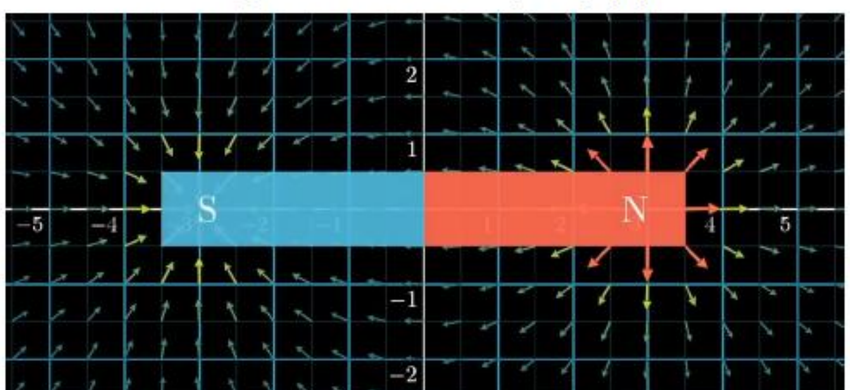
Széltérkép($\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{r}})$)



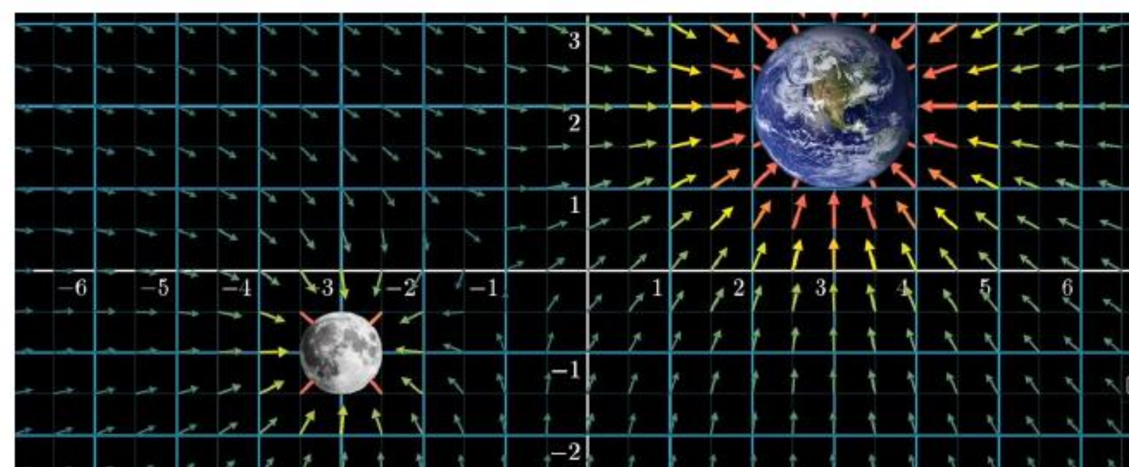
Elekromos tér ($\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{r}})$)



Mágneses tér ($\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{r}})$)



Gravitációs erőtér ($\underline{\mathbf{F}}_g(\underline{\mathbf{r}})$)



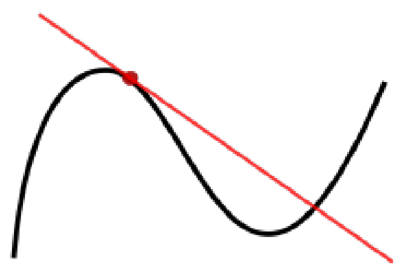
Skalár(vektor-, tenzor-)mező: adott tenzori jellegű helyfüggő mennyiség.

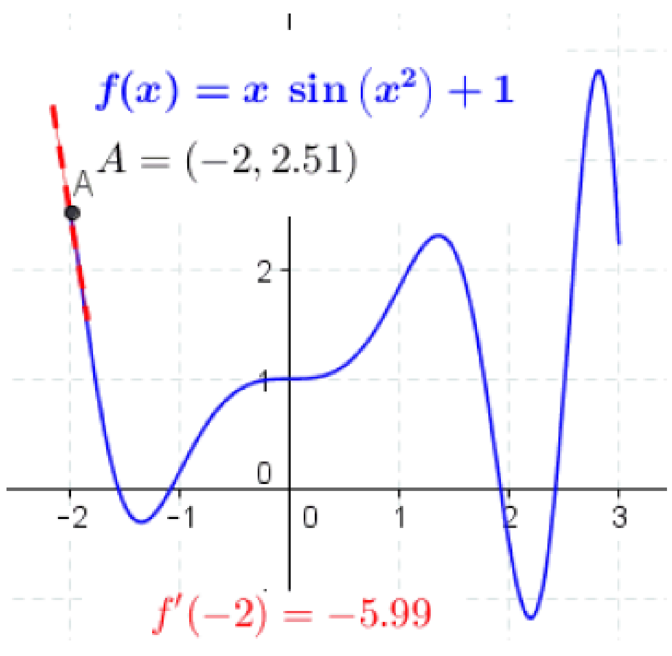
Helyfüggő $\mathcal{A}$ mennyiség jellemzése $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{r}})$ függvénnyel ($\mathcal{A}$ mennyiség értéke az $\vec{\mathbf{r}}$ helyvektorú pontban).

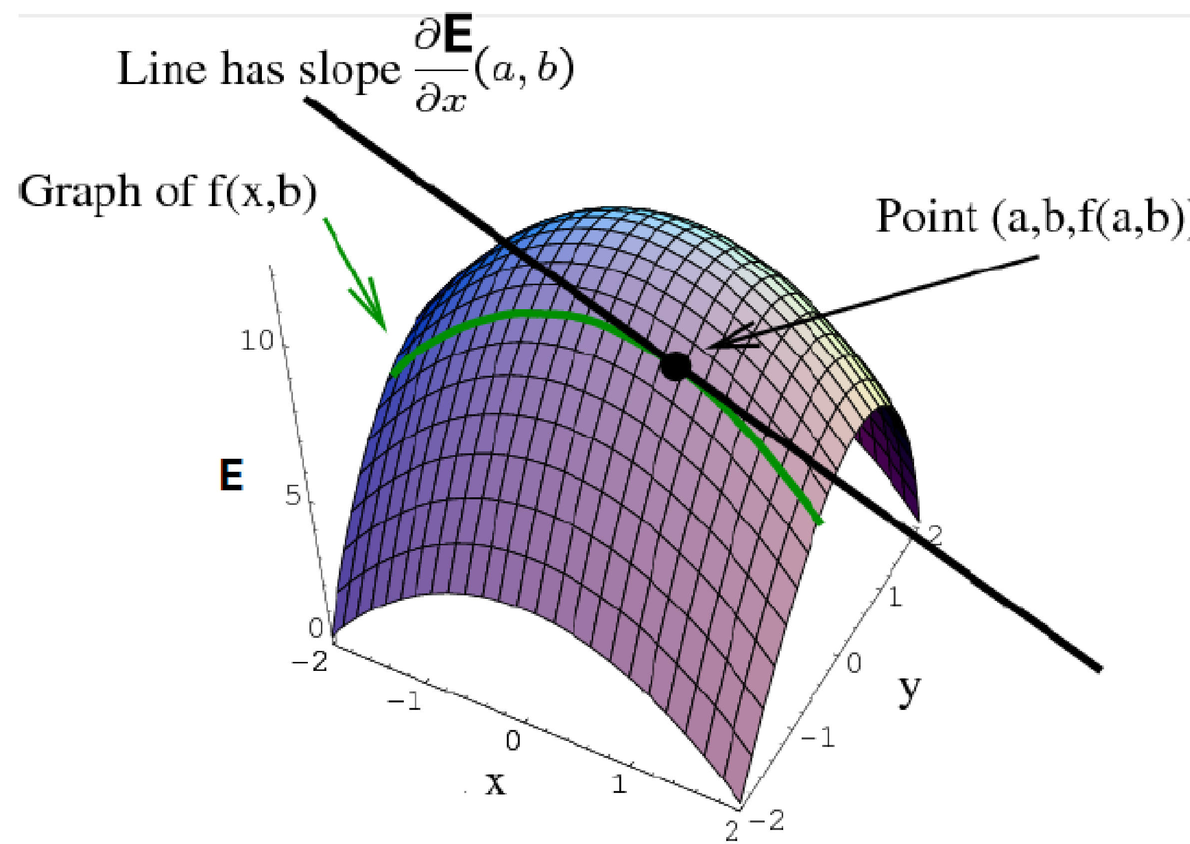
Skalármező geometriai jellemzése szintfelületekkel (azon pontok mértani helye, melyeken a skalármező ugyanazon értéket veszi fel).

Vektormező geometriai jellemzése áramgörbékkel (azon görbék, melyek érintője minden pontban párhuzamos a vektormező adott pontban felvett értékének irányával).

Deriválás




$f(x) = x\ \sin(x^2) + 1$
$A = (-2, 2.51)$
A
$f'(-2) = -5.99$


Line has slope $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}(a, b)$
Graph of f(x,b)
Point (a,b,f(a,b))
E
x
y

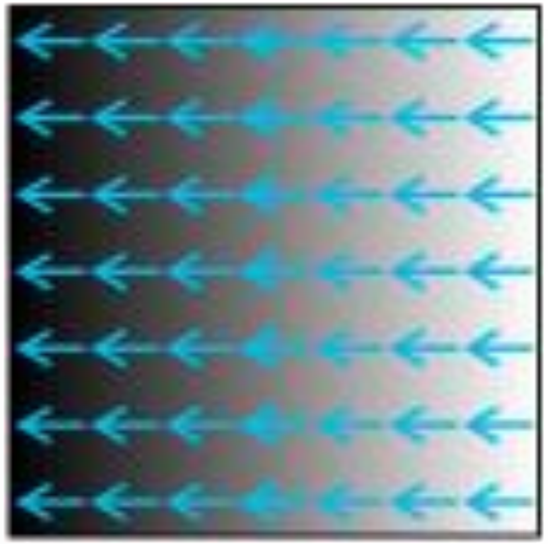
- Nabla operátor (~differenciáloperátor).
- Egy remek összefoglaló: https://elisecolin.medium.com/nabla-the-harp-that-listens-to-space-3f5c8dd085b7

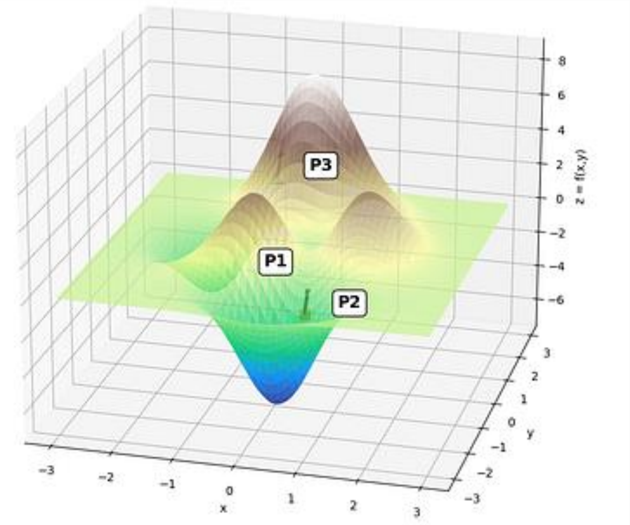
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

AN ASSYRIAN ALABASTER WALL PANEL RELIEF DATING BACK TO 645 B.C. TO 635 B.C. DEPICTS FOUR ASSYRIAN MUSICIANS PLAYING A LYRE, A VERTICAL HARP, AND DOUBLE PIPES IN THE GARDEN OF ASHURBANIPAL'S NORTH PALACE IN NINEVEH, ASSYRIA. THIS ARTWORK OFFERS A GLIMPSE INTO THE MUSIC CULTURE OF ANTIQUITY IN THE CRADLE OF CIVILIZATION OR MESOPOTAMIA. THE CAPTIVATING RELIEF WAS EXCAVATED BY THE ASSYRIAN ASSYRIOLOGIST HORMUZD RASSAM IN 1853 AT ASHURBANIPAL'S NORTH PALACE IN NINEVEH, ASSYRIA, AND IS CURRENTLY ON DISPLAY AT THE BRITISH MUSEUM IN LONDON.

Gradiens: ha f skalármező, akkor $\operatorname{grad} f = \nabla f = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$ vektormező.

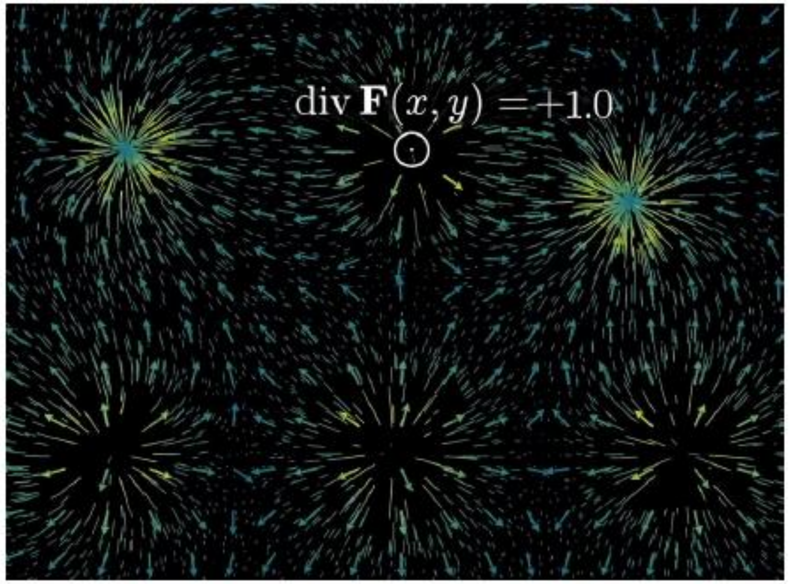
$$\operatorname{grad}\left(f(x_0, y_0)\right) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

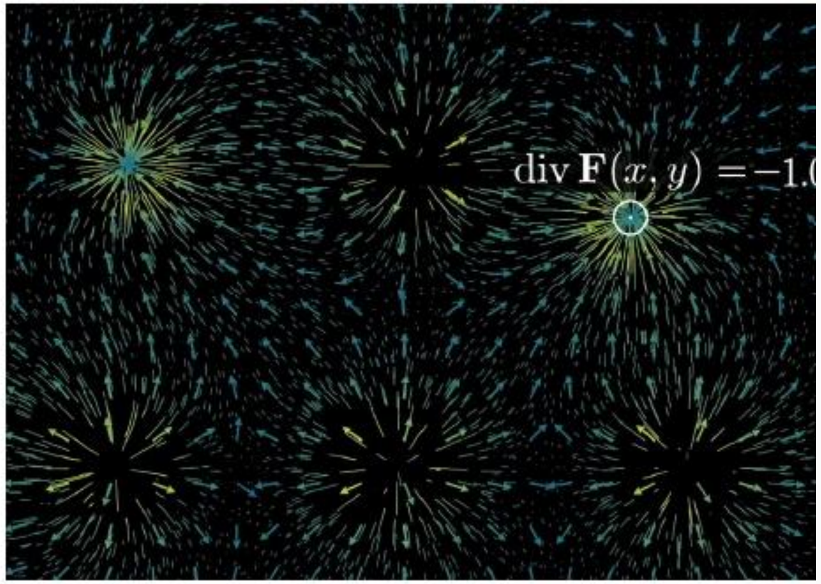




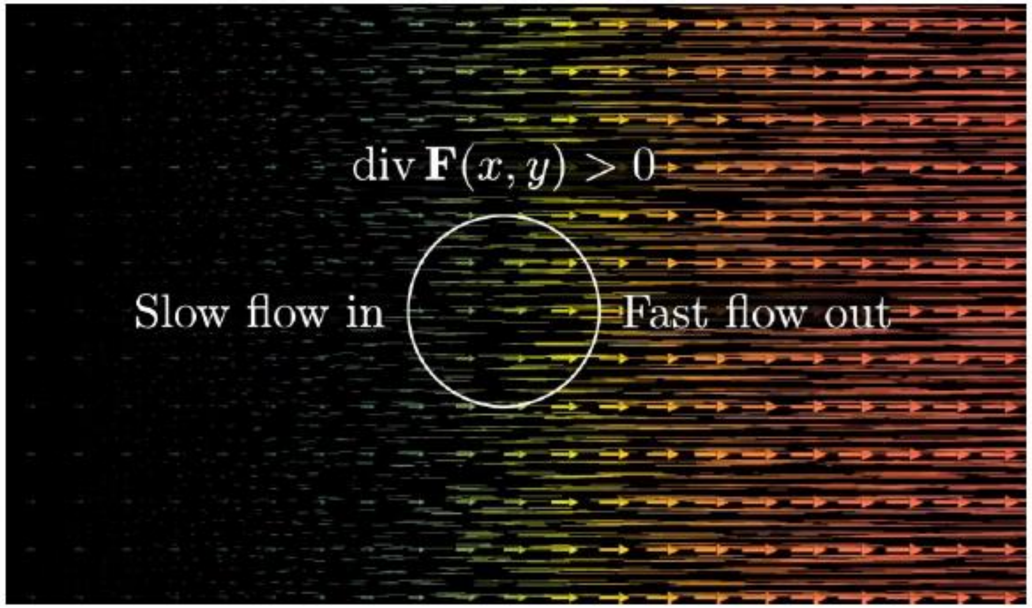
Divergencia: ha $\underline{\mathbf{v}}$ vektormező, akkor $\operatorname{div}\underline{\mathbf{v}} = \nabla\underline{\mathbf{v}} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$ skalármező.

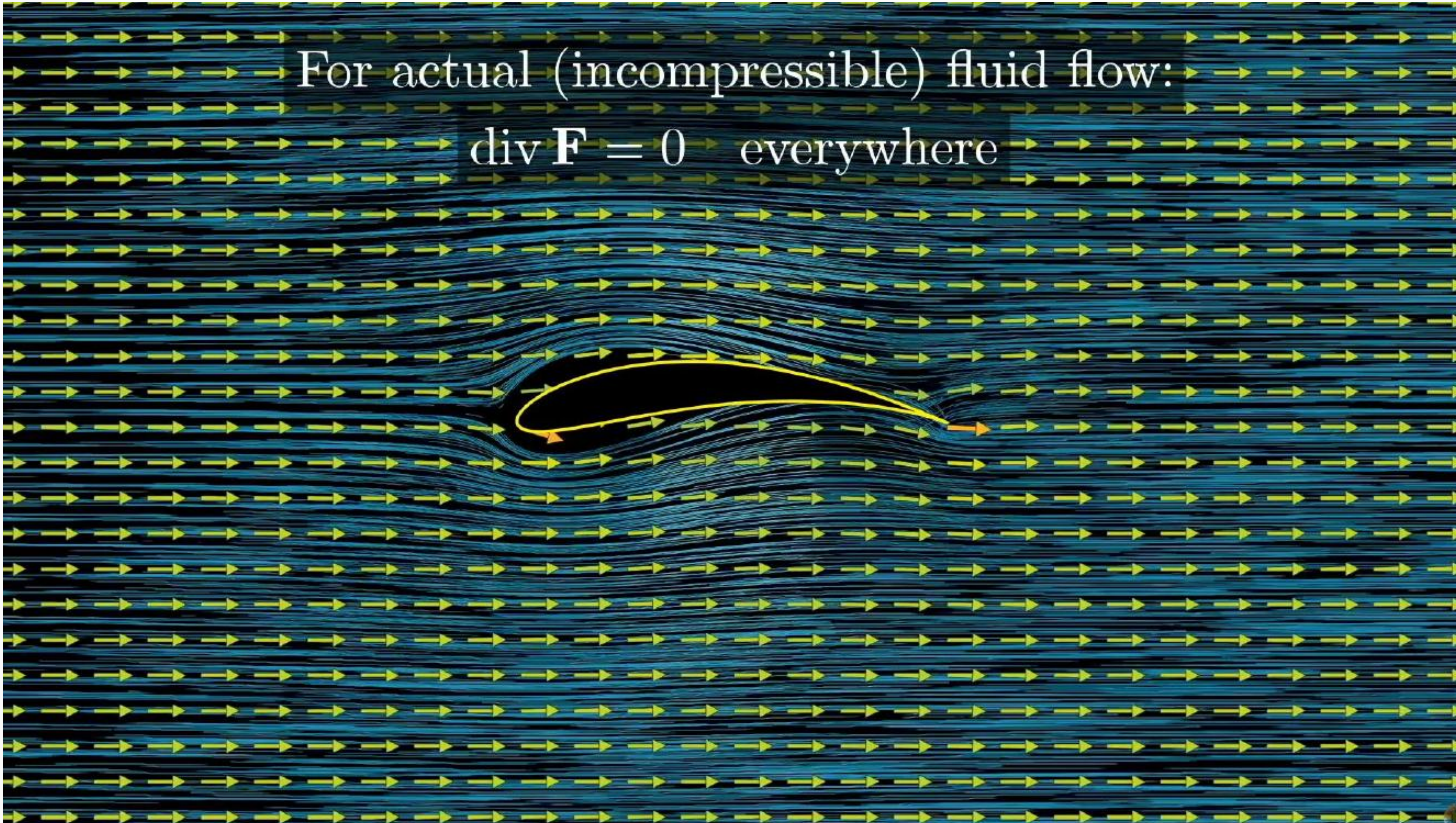
Divergencia





$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

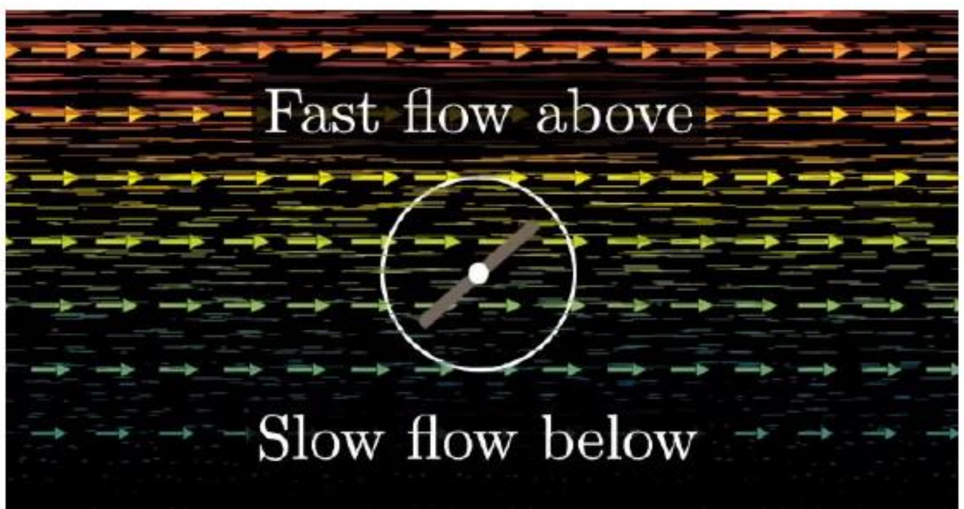


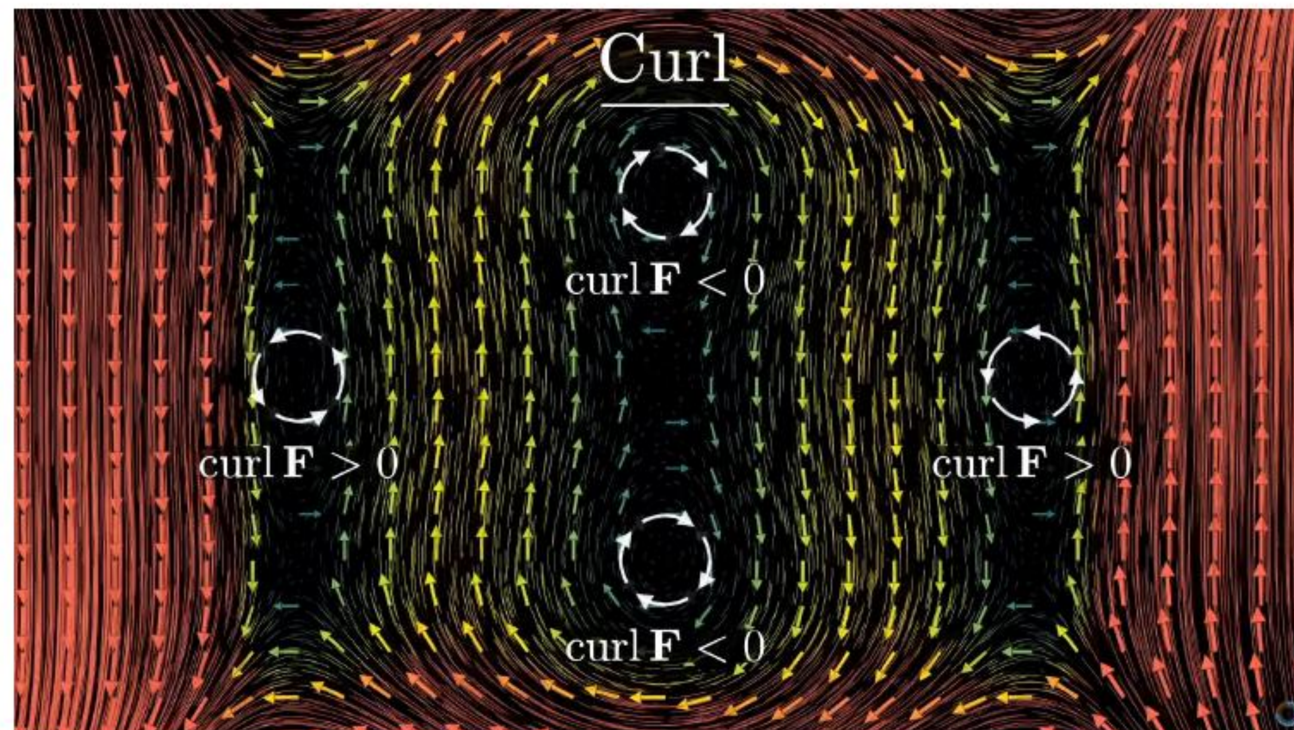

For actual (incompressible) fluid flow:
div **F** = 0 everywhere

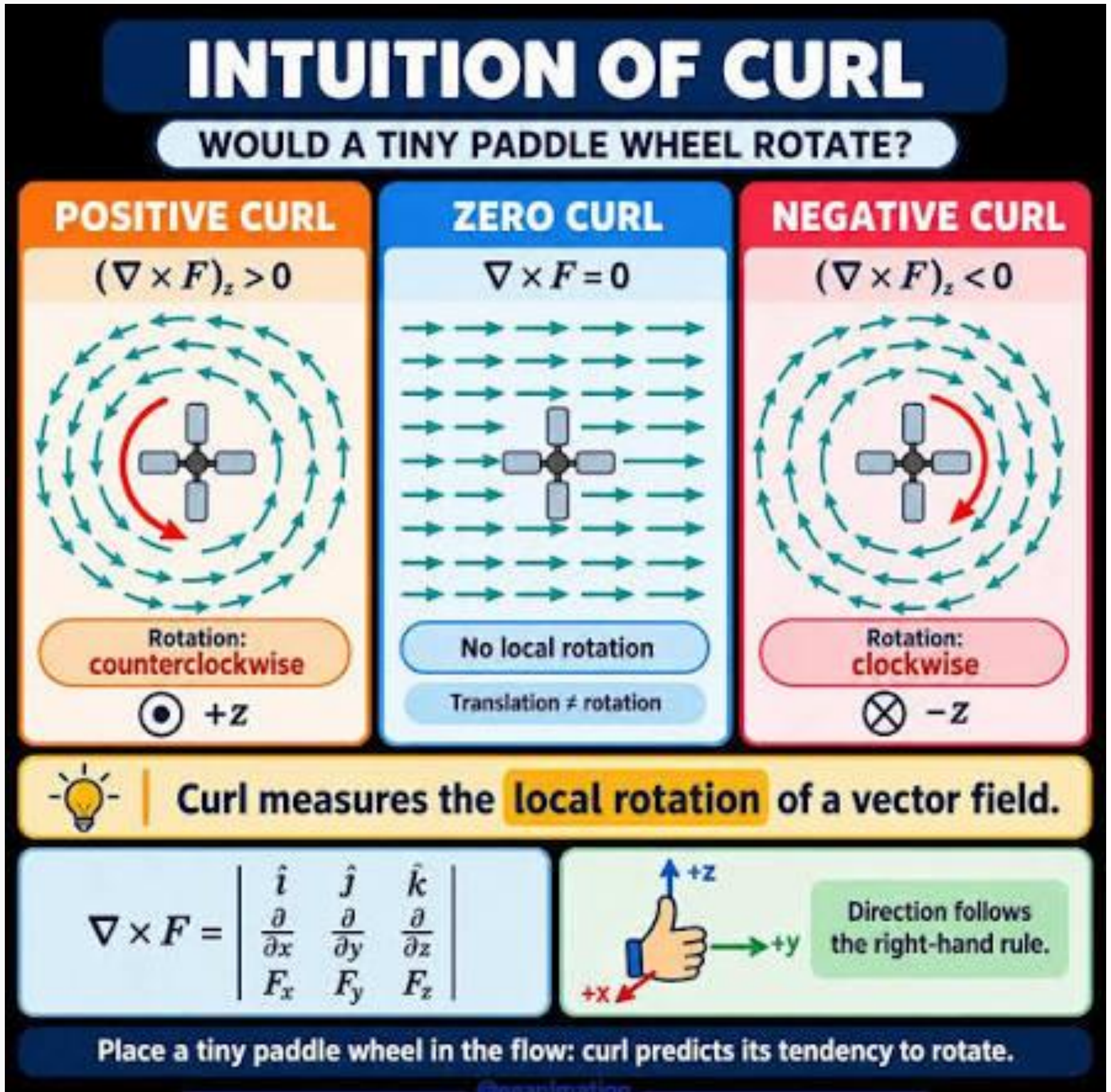
Rotáció: ha $\underline{\mathbf{v}}$ vektormező, akkor rot $\underline{\mathbf{v}}$ vektormező,
$(\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{v}})_x = \partial_y v_z - \partial_z v_y$, $(\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{v}})_y = \partial_z v_x - \partial_x v_z$, $(\mathrm{rot}\,\underline{\mathbf{v}})_z = \partial_x v_y - \partial_y v_x$.

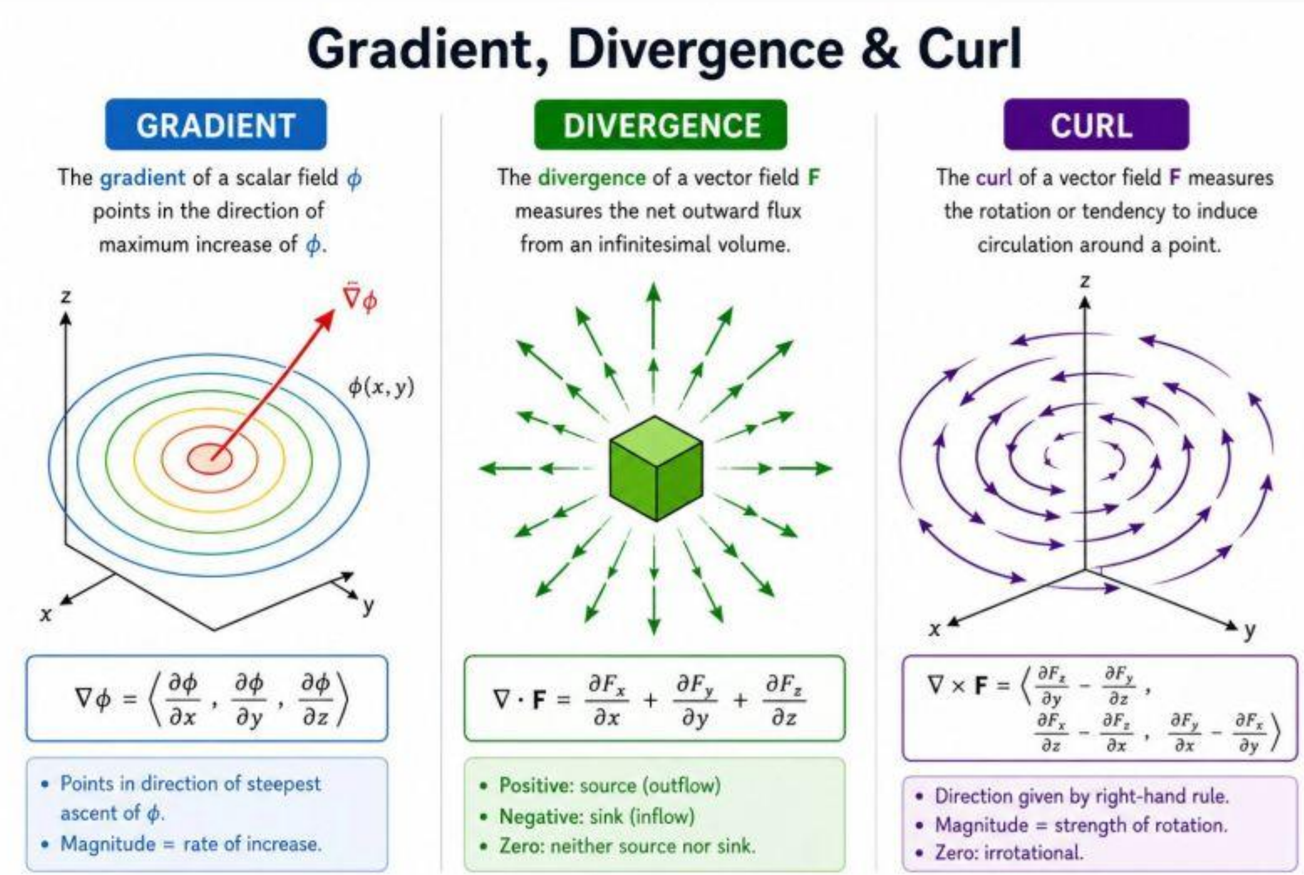
Rotáció

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ -\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$






INTUITION OF CURL
WOULD A TINY PADDLE WHEEL ROTATE?
POSITIVE CURL
$(\nabla \times F)_z > 0$
Rotation: counterclockwise
+z
ZERO CURL
$\nabla \times F = 0$
No local rotation
Translation ≠ rotation
NEGATIVE CURL
$(\nabla \times F)_z < 0$
Rotation: clockwise
−z
Curl measures the local rotation of a vector field.
$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$
+z
+y
+x
Direction follows the right-hand rule.
Place a tiny paddle wheel in the flow: curl predicts its tendency to rotate.

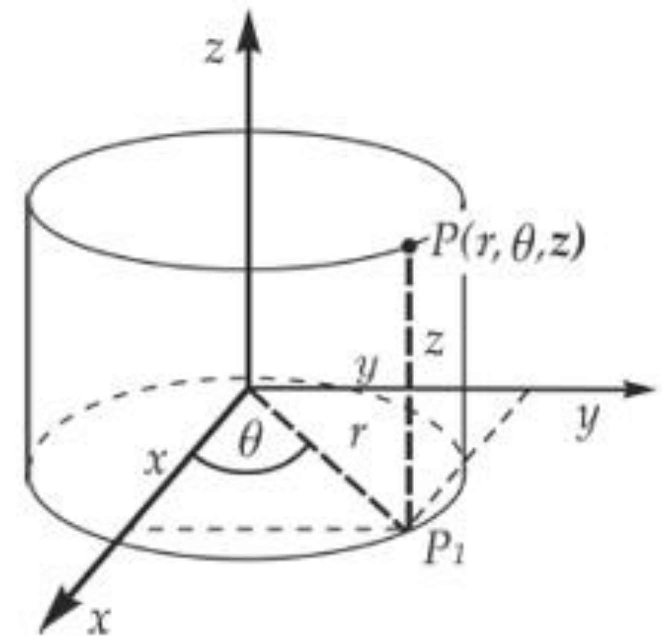

Gradient, Divergence & Curl
GRADIENT
The gradient of a scalar field ϕ points in the direction of maximum increase of ϕ.
z
x
y
$\vec{\nabla}\phi$
$\phi(x, y)$
$\nabla\phi = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle$
• Points in direction of steepest ascent of ϕ.
• Magnitude = rate of increase.
DIVERGENCE
The divergence of a vector field F measures the net outward flux from an infinitesimal volume.
$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
• Positive: source (outflow)
• Negative: sink (inflow)
• Zero: neither source nor sink.
CURL
The curl of a vector field F measures the rotation or tendency to induce circulation around a point.
z
x
y
$\nabla \times \mathbf{F} = \left\langle \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right\rangle$
• Direction given by right-hand rule.
• Magnitude = strength of rotation.
• Zero: irrotational.

2. Hengerkoordináták (r, φ, z)

Differenciáloperátorok:

- Gradiens: $(\mathrm{grad}\, f)_r = \partial_r f$, $(\mathrm{grad}\, f)_\varphi = \frac{1}{r}\partial_\varphi f$, $(\mathrm{grad}\, f)_z = \partial_z f$.
- Divergencia: $\mathrm{div}\, \underline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r}\partial_r(r v_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z$.
- Rotáció: $(\mathrm{rot}\, \underline{\mathbf{v}})_r = \frac{1}{r}\partial_\varphi v_z - \partial_z v_\varphi$, $(\mathrm{rot}\, \underline{\mathbf{v}})_\varphi = \partial_z v_r - \partial_r v_z$, $(\mathrm{rot}\, \underline{\mathbf{v}})_z = \frac{1}{r}(\partial_r(r v_\varphi) - \partial_\varphi v_r)$.

Henger koordináta-rendszer

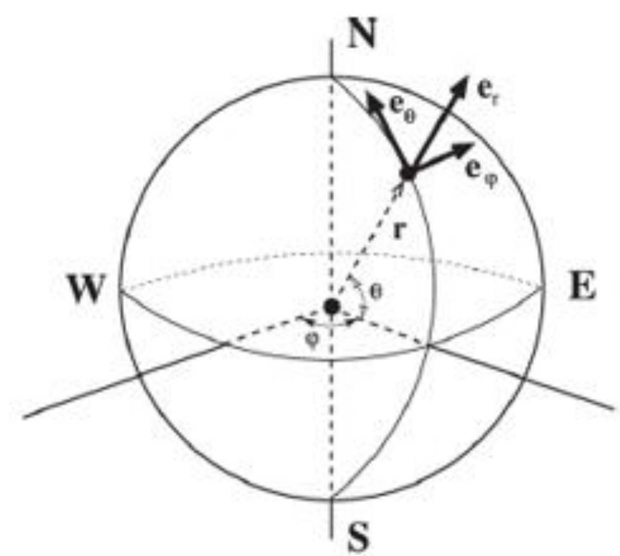


3. Gömbi polárkoordináták (R, ϑ, φ)

Differenciáloperátorok:

- Gradiens: $(\mathrm{grad}\, f)_R = \partial_R f$, $(\mathrm{grad}\, f)_\vartheta = \frac{1}{R}\partial_\vartheta f$, $(\mathrm{grad}\, f)_\varphi = \frac{1}{R\sin\vartheta}\partial_\varphi f$.
- Divergencia: $\mathrm{div}\, \underline{\mathbf{v}} = \frac{1}{R^2}\partial_R(R^2 v_R) + \frac{1}{R\sin\vartheta}\partial_\vartheta(v_\vartheta \sin\vartheta) + \frac{1}{R\sin\vartheta}\partial_\varphi v_\varphi$
- Rotáció: $(\mathrm{rot}\, \underline{\mathbf{v}})_R = \frac{1}{R\sin\vartheta}(\partial_\vartheta(v_\varphi \sin\vartheta) - \partial_\varphi v_\vartheta)$, $(\mathrm{rot}\, \underline{\mathbf{v}})_\vartheta = \frac{1}{R\sin\vartheta}\partial_\varphi v_R - \frac{1}{R}\partial_R(R v_\varphi)$, $(\mathrm{rot}\, \underline{\mathbf{v}})_\varphi = \frac{1}{R}(\partial_R(R v_\vartheta) - \partial_\vartheta v_R)$

Gömbi koordináta-rendszer



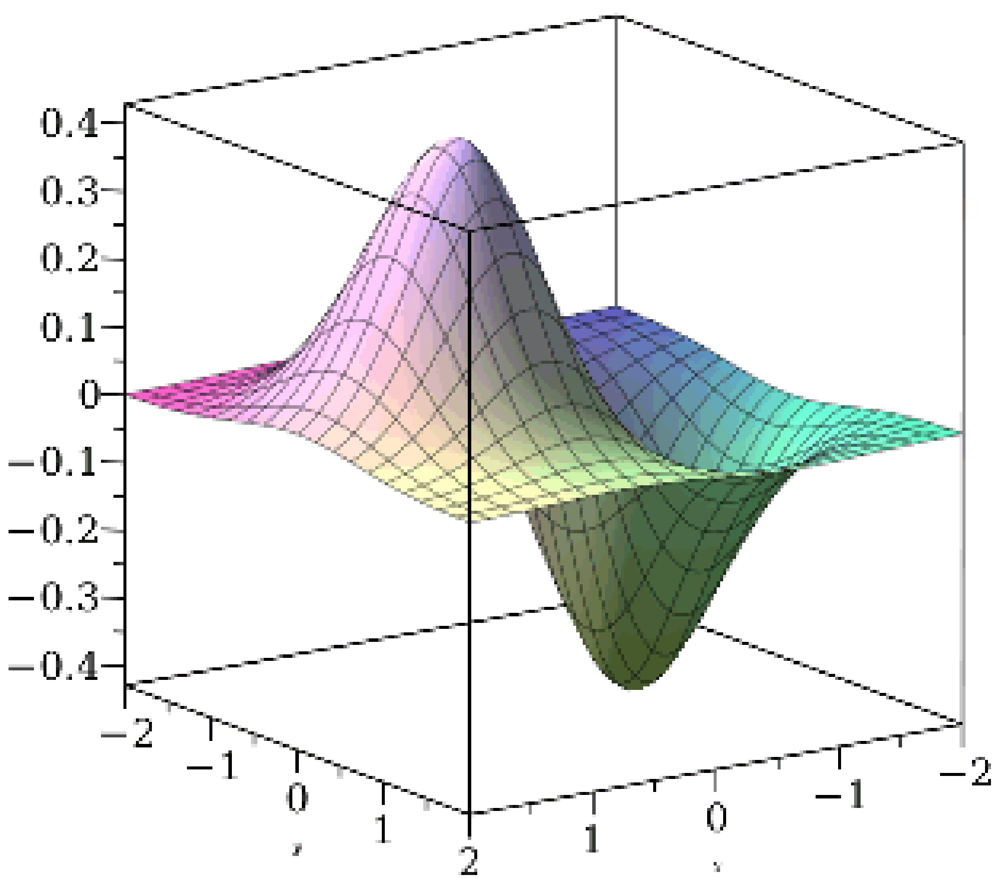
- (Skaláris) Laplace operátor:
  - Skalárból skalárt „csinál”.
  - Tulajdonképpen = div grad

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\Delta\Phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\Phi)}$$



At the summit of a smooth local bump, the central value is greater than the neighboring values. The gradient points outward and downhill in every direction. The resulting divergence is negative:

$\nabla^2 f<0$.

At the bottom of a smooth local depression, the central value is smaller than the surrounding values. The gradient points inward, toward the higher values around it, and the divergence is positive:

$\nabla^2 f>0$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta}\Phi = \mathbf{div}(\mathbf{grad}\,\Phi)}$$

- (Vektoriális) Laplace operátor:
  - Vektorból vektort „csinál”.

$$\boxed{\Delta\vec{\mathrm{w}} = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{w}}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{w}})}$$

$$(\Delta\mathbf{A})_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$$

$$(\Delta\mathbf{A})_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}$$

$$(\Delta\mathbf{A})_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

- Vektoranalízis azonosságok:
    - rot grad mindig = 0! => skalárpotenciál
    - div rot mindig = 0! => vektorpotenciál

Vektormező rotációja mindig forrásmentes, azaz

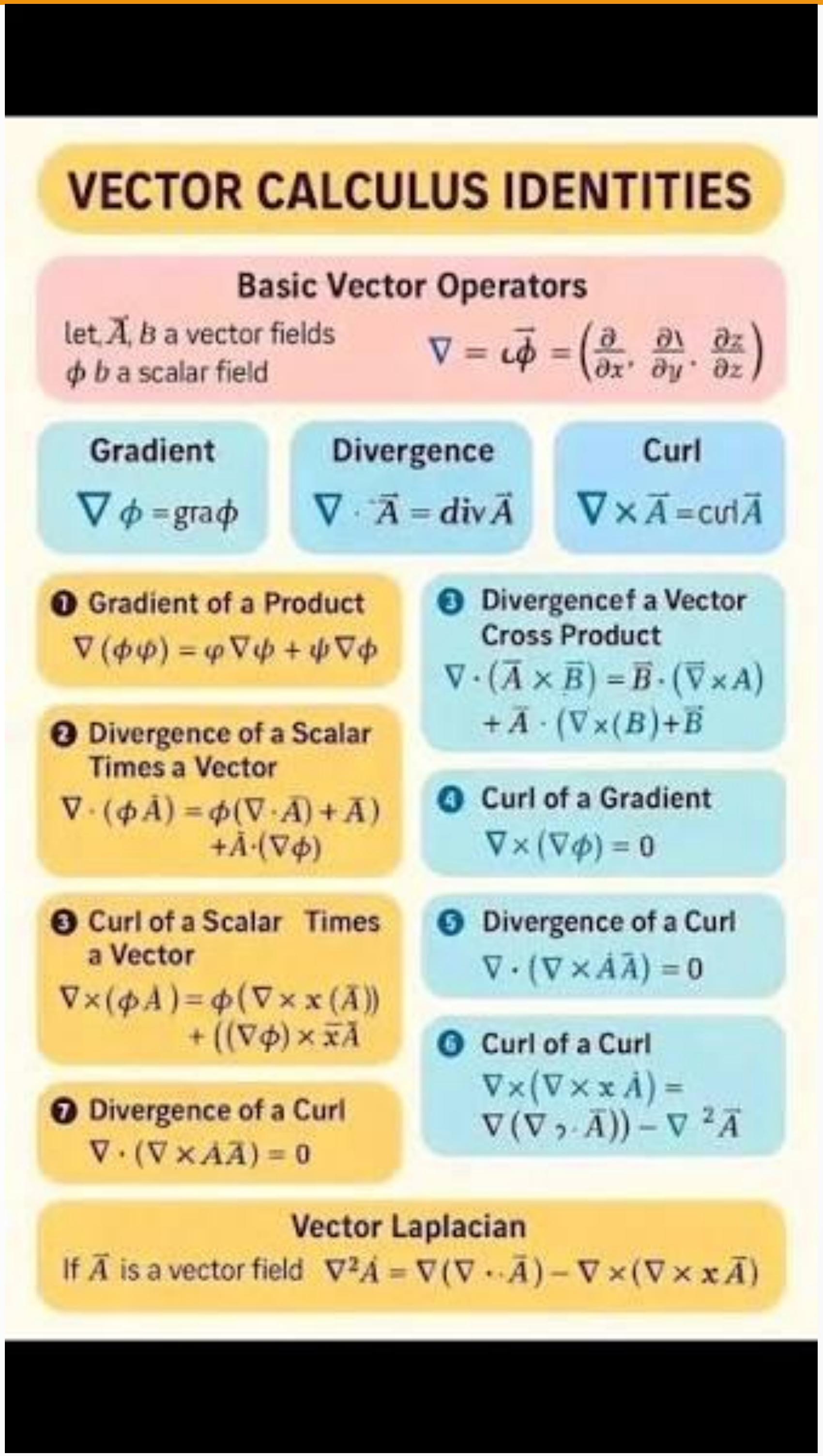
$$\boxed{\mathbf{div}(\mathbf{rot}\,\vec{\mathrm{v}}) = 0}$$

Fordítva, ha egy vektormező forrásmentes, akkor egy másik vektormező rotációja (egyszeresen összefüggő tartomány belsejében).

Skalármező gradiense mindig örvénymentes:

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,\Phi) = \vec{0}}$$

Fordítva, minden örvénymentes vektormező előállítható (lokálisan) egy megfelelő skalármező gradienseként.



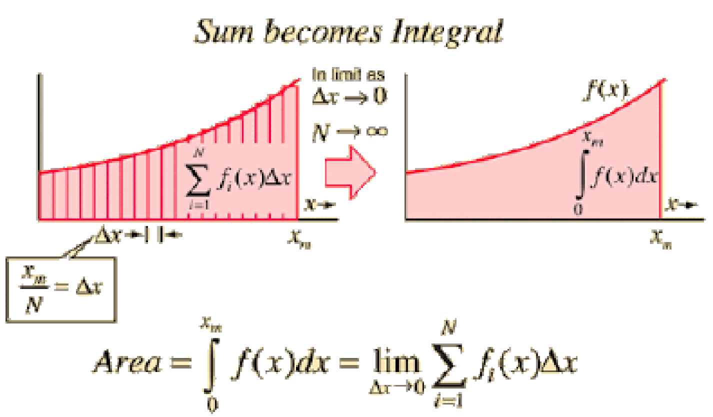
Integrálás

Skalártér

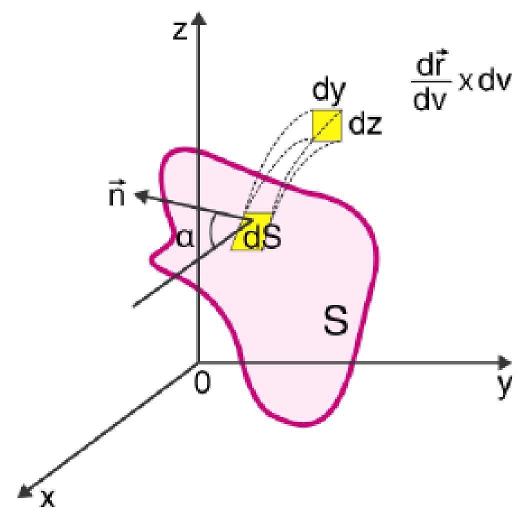
Vektortér

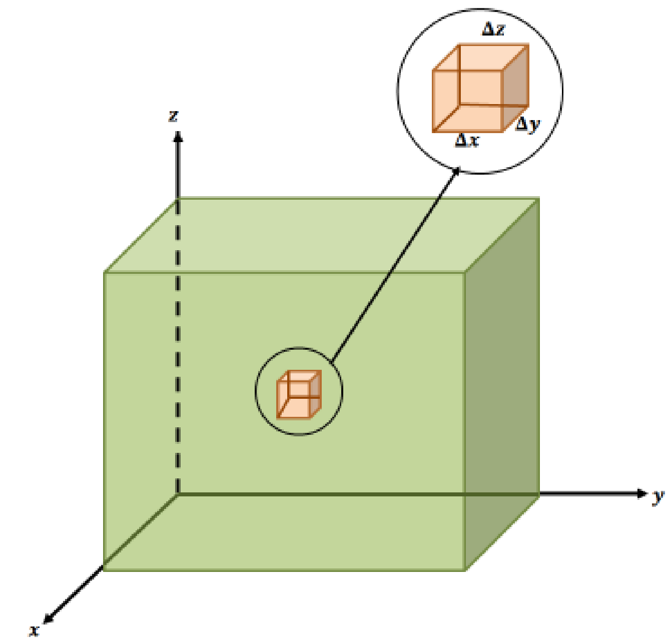
Térfogati

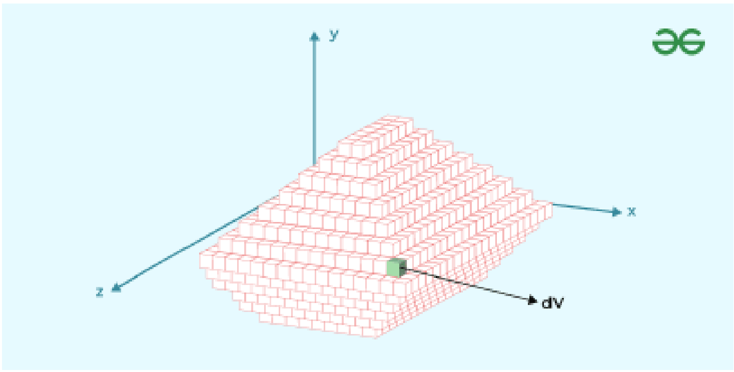
Vonal menti



Felületi







A vonalmenti integrál (line integral) a vektorkalkulusban azt adja meg, hogy egy adott görbe mentén haladva mekkora egy függvény (skalármező vagy vektormező) összesített értéke.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Vektormezőre:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

- Skalármezőre:

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt$$

A **felületi integrál** (surface integral) a vonalmenti integrál kétdimenziós kiterjesztése. Segítségével nem egy vonal (görbe), hanem egy térbeli **felület (S)** mentén összegezünk egy függvényt.

A fizikában a legfontosabb alkalmazása a **fluxus kiszámítása** (például mennyi folyadék áramlik át egy szűrőn, vagy mekkora az elektromos/mágneses mező átáramlása egy zárt felületen).

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du\, dv$$

A **térfogati integrál** (volume integral) a vektorkalkulusban a vonal- és felületi integrálok háromdimenziós kiterjesztése. Segítségével egy teljes háromdimenziós V térfogat (test) felett integrálunk egy függvényt.

A fizikában és a mérnöki tudományokban rendkívül gyakori: ezzel számoljuk ki egy test **tömegét** (változó sűrűség esetén), **tömegközéppontját**, **tehetetlenségi nyomatékát**, vagy egy adott térrészben lévő **összes elektromos töltést**.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\,du\,dv\,dw$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

- Gauss-tétel (vagy Gauss-Osztrogradszkij-tétel, máshol: Osztrohradszkij írásmódban, vagy divergenciatétel).

Divergencia-tétel (Gauss-tétel): vektormező divergenciájának térfogati integrálja egy $\mathcal{V}$ térrészre egyenlő a vektormező felületi integráljával a térrész $\partial\mathcal{V}$ határfelületére

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{v})\, dV$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\vec{\mathbf{v}}\,\mathbf{d}^3\vec{\mathbf{r}} = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}}}$$

- Stokes-tétel (vagy Kelvin-Stokes-tétel).

Stokes-tétel: vektormező rotációjának felületi integrálja egy $\mathcal{F}$ felületre egyenlő a vektormezőnek a felületet határoló $\partial\mathcal{F}$ görbére vett vonalmenti integráljával

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{A}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{F}} \mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathfrak{s}} = \int_{\partial\mathcal{F}} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}}$$